MATEMATIKA DISKRIT

Murtalib, M.Pd
Gunawan, M.Pd
Dr. Syarifuddin, M.Pd

Penerbit :
Y-PBB
Yayasan Pendidikan Bima Berilmu

MATEMATIKA DISKRIT

Penulis:

Murtalib, S.Pd., M.Pd
Gunawan, S.Pd., M.Pd
Dr. Syarifuddin, S.Pd., M.Pd

2024

MATEMATIKA DISKRIT

Penulis:
Murtalib, S.Pd., M.Pd
Gunawan, S.Pd., M.Pd
Dr. Syarifuddin, S.Pd., M.Pd

ISBN:
978-623-10-2846-4
ISBN 978-623-10-2846-4
9 786231 028464

Editor:
Adi Apriadi Adiansha, M.Pd.

Desain Sampul dan Tata Letak:
Murtalib, S.Pd., M.Pd

Penerbit:
Yayasan Pendidikan Bima Berilmu

Redaksi:
Jalan Lintas Sumbawa Bima, desa Leu, RT. 009, RW. 004, kecamatan Bolo, kabupaten Bima, Nusa Tenggara Barat, Kode post. 84161
Email: bimaberilmu@gmail.com

Cetakan Pertama, Juli 2024

i-viii + 1-99 hlm, 18 x 25 cm

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan ke hadirat Allah SWT atas rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan buku sederhana ini dengan tepat waktu. Buku ini disusun sebagai bahan ajar pada mata kuliah Matematika Diskrit di lingkup mahasiswa dan merupakan luaran tambahan dari Hibah Penelitian Dosen Pemula (PDP) tahun anggaran 2022 yang diberikan oleh Kemenristek Dirjen Pendidikan Tinggi, Riset dan Teknologi.

Materi dalam buku ini merupakan materi pilihan dari berbagai referensi yang telah dipelajari, termasuk buku-buku metode diskrit yang dijadikan acuan. Buku ini mencakup enam topik utama: pengantar kaidah pencacahan sederhana, permutasi dan kombinasi, teorema binomial dan segitiga Pascal, prinsip sangkar merpati, fungsi pembangkit, dan prinsip inklusif-ekslusif.

Materi dan soal latihan dalam buku ini dirancang untuk mendorong mahasiswa dalam mengeksplorasi kemampuan berpikir mereka, khususnya kemampuan berpikir sistematis, kritis, dan analitis melalui kinerja mandiri, tanggung jawab, dan ketekunan. Beberapa teorema dalam buku ini juga disertai dengan pembuktian. Diharapkan ketekunan mahasiswa dalam mengerjakan soal latihan dapat mencerminkan beberapa karakter kerangka kerja Nasional Indonesia (KKNI) seperti kemandirian, tanggung jawab, dan ketekunan.

Sebagai bentuk rasa syukur, penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah mendukung pengembangan buku ini, terutama kepada Dirjen Pendidikan Tinggi, Riset dan Teknologi dan Pengabdian Kepada Masyarakat atas dana yang diberikan. Terima kasih yang sebesar-besarnya juga disampaikan kepada civitas akademika STKIP Bima: Dr. Nasution, Ketua STKIP Bima; Bapak IKa Wirahmad, S.Kom., M.Pd, Ketua LPPM STKIP Bima; dan Dr. Syarifuddin, S.Pd., M.Pd, Ketua Program Studi Pendidikan Matematika, serta teman-teman dosen di Program Studi Pendidikan Matematika yang telah memberikan dukungan, usul, dan saran.

Penulis menyadari bahwa buku ini masih memiliki kekurangan, sehingga saran dan kritik yang membangun sangat diharapkan untuk penyempurnaan buku ini di masa depan. Semoga buku ini dapat bermanfaat bagi pembaca, pengembang matematika diskrit, guru matematika, dan peminat matematika diskrit.

Bima, Juli 2024

Penulis

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

BAB 1
TEKNIK DASAR PENCACACAHAN SEDERHANA

A. Capaian Pembelajaran Mata kuliah (CPMK)

Mahasiswa mampu menjelaskan teknik dasar dalam pencacahan sederhana dan menerapkannya untuk menyelesaikan persoalan sehari-hari secara logis, kritis dan analitis melalui kinerja mandiri, tanggung jawab dan pantang menyerah

B. Kemampuan Akhir yang Diharapkan (Sub-CPMK)

1. Menjelaskan prinsip dasar perkalian dan prinsip penambahan
2. Menerapkan prinsip dasar perkalian untuk menentukan banyaknya susunan obyek yang memenuhi aturan tertentu.
3. Menerapkan prinsip dasar penambahan untuk menentukan banyaknya susunan obyek yang memenuhi aturan tertentu

C. Materi

Dalam bab ini akan diperkenalkan teknik menghitung (mencacah) objek-objek diskrit. Terdapat dua aturan utama untuk menghitung banyaknya susunan objek-objek diskrit yang meliputi aturan perkalian dan aturan penambahan.

1.1 Aturan Perkalian

Secara khusus aturan perkalian dinyatakan sebagai berikut.

Aturan Perkalian Secara Khusus

Misal suatu prosedur dapat dipartisi menjadi barisan dua tugas yang saling bebas.Jika tugas pertama dapat terjadi dalam n_1 cara dan setiap tugas pertama diikuti oleh tugas kedua yang dapat terjadi dalam n_2 cara, maka prosedur tersebut dapat terjadi dalam $n_1 \times n_2$ cara.

Aturan di atas disederhanakan secara simbolis berikut.

$$\frac{T_1}{n_1}\ \frac{T_2}{n_2} \Rightarrow \frac{T_1 \wedge T_2}{n_1 \times n_2}\, cara$$

Catatan

1) Simbol “ $\frac{T_i}{n_i}$ ” dibaca “tugas ke-*i* dapat terjadi dalam n_i cara”, dengan $i \in \mathbb{N}$
2) Prosedur adalah langkah terurut untuk melaksanakan suatu tugas dalam menentukan banyaknya suatu kejadian.
3) Symbol “ $\wedge$ ” melambangkan kata penghubung “dan” yang menyatakan hubungan dua kejadian yang saling bebas.

4) Dua atau lebih tugas yang saling bebas adalah tugas-tugas yang terjadi dimana tugas pertama diikuti oleh tugas-tugas yang lain.

Contoh 1.1

Tas yang terbuat dari kain tenun “Tembe Nggoli” khas daerah Bima pada gambar dibawah ini akan dilabel dengan sebuah huruf dan diikuti oleh sebuah bilangan bulat positif kurang dari 9.

Berapakah maksimum banyaknya tas di atas yang dapat dilabel berbeda?

Penyelesaian

Prosedur :

Melabel sebuah tas dengan sebuah huruf dan sebuah bilangan bulat positif kurang dari 9.

Prosedur ini dapat dipartisi menjadi dua tugas yang saling bebas.Namakan sebagai T_1, dan T_2 :

T_1= Melabel tas dengan sebuah huruf. Tugas ini dapat dilakukan dengan **26 cara (**karena ada 26 huruf dalam abjad)

T_2= Melabel sebuah tas dengan sebuah bilangan bulat positif <9. Tugas ini dapat dilakukan dengan **8 cara** (karena ada 8 bilangan bulat positif < 9)

Berdasarkan aturan perkalian, maka prosedur tersebut dapat terjadi dalam

$$\frac{T_1}{26}\ \frac{T_2}{8} \Rightarrow \frac{T_1 \wedge T_2}{26 \times 8 = 208} \text{ cara}$$

Jadi, Maksimum banyaknya tas yang diberi label berbeda adalah 208.

Selanjutnya Teknik perkalian dapat diperluas dalam dalil 1.2 berikut.

Aturan Perkalian Secara Umum

Misal suatu prosedur dapat dipecah menjadi barisan k tugas yang saling bebas,dengan $k \geq 2$, $k \in Z^+$. Namakan tugas-tugas tersebut T_1, T_2, T_3,.., T_k. Jika T_1, T_2, T_3,...,T_k secara berturut-turut dapat terjadi dalam n_1, n_2, n_3,..., n_k cara, maka prosedur tersebut dapat terjadi dalam $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$ *cara*.

Aturan di atas disederhanakan secara simbolis berikut.

$$\frac{T_1}{n_1}\ \frac{T_2}{n_2}\ \frac{T_3}{n_3} \ldots \frac{T_k}{n_k} \Rightarrow \frac{T_1 \wedge T_2 \wedge T_3 \wedge \ldots \wedge T_k}{n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k}\ cara$$

Contoh 1. 2

Terdapat dua kelompok. Kelompok I terdiri dari 4 orang dan kelompok II terdiri dari 5 orang.Tentukan :

(a) Berapa banyak cara setiap orang pada kelompok I memilih tepat satu orang pada kelompok II dengan syarat pilihan setiap orang pada kelompok I boleh sama ?

(b) Berapa banyak cara setiap orang pada kelompok I memilih tepat satu orang pada kelompok II dengan syarat pilihan setiap orang pada kelompok I berbeda?

Penyelesaian

(a) Prosedur :

Setiap orang dikelompok I memilih tepat satu orang pada kelompok II dengan syarat pilihan setiap orang pada kelompok I boleh sama.

Prosedur ini dapat dipartisi menjadi 4 tugas yang saling bebas sebagai berikut.Namakan sebagai T_1, T_2, T_3, T_4.

T_1= Orang pertama pada kelompok I memilih satu orang pada kelompok II, T_1 dapat dilakukan dengan **5 cara**(karena terdapat 5 orang pada kelompok II)

T_2= Orang kedua pada kelompok I memilih satu orang pada kelompok II, T_2dapat dilakukan dengan **5 cara** (karena pilihan boleh sama dengan pilihan orang pertama sehingga tetap terdapat 5 orang yang dipilih pada kelompok II)

T_3= Orang ketiga pada kelompok I memilih satu orang pada kelompok II, T_3 dapat dilakukan dengan **5 cara** (karena pilihan boleh sama dengan pilihan dua orang sebelumnya sehingga tetap terdapat 5 orang yang dipilih pada kelompok II)

T_4= Orang keempat pada kelompok I memilih satu orang pada kelompok II, T_4dapat dilakukan dengan **5 cara** (karena pilihan boleh sama dengan pilihan tiga orang sebelumnya sehingga tetap terdapat 5 orang yang dipilih pada kelompok II)

Berdasarkan aturan perkalian, maka prosedur tersebut dapat terjadi dalam

$$\frac{T_1}{5}\ \frac{T_2}{5}\ \frac{T_3}{5}\ \frac{T_4}{5} \Rightarrow \frac{T_1 \wedge T_2 \wedge T_3 \wedge T_4}{5\times 5\times 5\times 5 = 625}\ cara$$

Jadi,banyak cara setiap orang pada kelompok I memilih tepat satu orang pada kelompok II dengan syarat pilihan setiap orang pada kelompok I boleh sama adalah 625.

(b) Prosedur :

Setiap orang dikelompok I memilih tepat 1 orang pada kelompok II dengan syarat pilihan setiap orang pada kelompok I berbeda.

Prosedur ini dapat dipecah menjadi 4 tugas yang saling bebas sebagai berikut.Namakan tugas-tugas terebut sebagai T_1, T_2, T_3, dan T_4.

T_1= Orang pertama pada kelompok I memilih satu orang pada kelompok II, hal ini dapat dilakukan dengan **5**cara

T_2= Orang ke-2 pada kelompok I memilih satu orang pada kelompok II dengan pilihan tidak boleh sama dengan pilihan orang pertama pada kelompok I, hal ini dapat dilakukan dengan **4** cara

T_3= Orang ke-3 pada kelompok I memilih satu orang pada kelompok II dengan pilihan tidak boleh sama dengan pilihan dua orang sebelumnya pada kelompok I, hal inidapat dilakukan dengan **3** cara

T_4= Orang ke-4 pada kelompok I memilih satu orang pada kelompok II dengan pilihan tidak boleh sama dengan pilihan tiga orang sebelumnya, hal ini dapat dilakukan dengan **2** cara.

Berdasarkan aturan perkalian,maka prosedur tersebut dapat terjadi dalam

$$\frac{T_1}{5}\ \frac{T_2}{4}\ \frac{T_3}{3}\ \frac{T_4}{2} \Rightarrow \frac{T_1 \wedge T_2 \wedge T_3 \wedge T_4}{5\times 4\times 3\times 2 = 120}\ cara$$

Jadi, banyak cara setiap orang pada kelompok I memilih tepat satu orang pada kelompok II dengan syarat pilihan setiap orang pada kelompok I berbeda adalah 120.

Contoh 1.3

(a) Berapa banyak bilangan empat angka dapat dibentuk dari angka-angka 1, 2, 3, 4, 7, 8 jika pengulangan tidak diperbolehkan?

(b) Berapa banyak bilangan dalam (a) yang genap?

(c) Berapa banyak bilangan dalam (a) yang lebih besar dari 4000

Penyelesaian

(a) Prosedur :

Membentuk sebuah bilangan 4-angka yang terdiri dari angka 1, 2, 3, 4, 7, 8 dengan syarat pengulangan angka tidak diperbolehkan (misal bilangan : 1234, 1237, 1238, 1347, 1348, 2347, 2348, dll).

Karena bilangan yang dibentuk 4 angka maka prosedur ini dapat dipartisi menjadi 4 tugas yang saling bebas sebagai berikut. Namakan tugas-tugas sebagai T_1, T_2, $T_{3,}$ T_4.

T_1= Meletakkan sebuah angka pada **posisi ribuan**, hal ini dapat dilakukan **6** cara (karena tersedia 6 angka berbeda)

T_2= Meletakkan sebuah angka yang berbeda dengan angka pada posisi ribuan untuk diletakkan pada **posisi ratusan**, hal ini dapat dilakukan **5** cara (karena salah satu angka sudah diletakkan pada posisi ribuan sehingga tersisa 5 angka dari 6 angka tersedia)

T_3= Meletakkan sebuah angka yang berbeda dengan dua angka yang sudah diletakkan pada posisi satuan dan ribuan untuk diletakkan pada **posisi puluhan**, hal ini dapat dilakukan **4** cara (karena dua angka sudah diletakkan pada posisi ribuan dan ratusan sehingga tersisa 4 angka dari 6 angka tersedia)

T4= Meletakkan sebuah angka yang berbeda dengan tiga angka yang sudah diletakkan pada posisi ribuan, ratusan, dan puluhan untuk diletakkan pada **posisi puluhan**, hal ini dapat dilakukan **3** cara (karena tiga angka sudah diletakkan pada posisi ribuan, ratusan, dan puluhan sehingga tersisa 3 angka dari 6 angka tersedia)

Berdasarkan aturan perkalian, maka prosedur tersebut dapat terjadi dalam

$$\frac{T_1}{6}\ \frac{T_2}{5}\ \frac{T_3}{4}\ \frac{T_4}{3} \Rightarrow \frac{T_1 \wedge T_2 \wedge T_3 \wedge T_4}{6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360}\ cara$$

Jadi, banyak bilangan empat angka yang dapat dibentuk dari angka-angka 1, 2, 3, 4, 7, 8 jika pengulangan tidak diperbolehkan adalah 360.

(b) Prosedur :

Membentuk sebuah bilangan genap 4-angka yang terdiri dari angka 1, 2, 3, 4, 7, 8 dengan syarat pengulangan angka tidak diperbolehkan (misal bilangan: 2418, 3124, 1248, 2478, 4312, dll).

Mengingat bilangan yang dibentuk berupa bilangan genap maka angka pada posisi satuan harus meletakkan angka genap dan angka pada tiga posisi lainnya yaitu puluhan, ratusan dan ribuan bisa dipilih salah satu dari 5 angka sisanya. Karena susunan bilangan 4 angka maka prosedur ini dapat dipartisi menjadi 4 tugas yang saling bebas. Namakan tugas-tugas tersebut sebagai T_1, T_2, T_3, dan T_4.

T_1= Meletakkan sebuah angka pada **posisi satuan**, hal ini dapat dilakukan **3** cara(karena tersedia 3 angka genap. yaitu angka : 2, 4 ,8)

T_2= Meletakkan sebuah angka yang berbeda dengan angka satuan untuk diletakkan pada **posisi ribuan**, hal ini dapat dilakukan **5**cara(karena salah satu angka sudah diletakkan pada posisi ribuan sehingga tersisa 5 angka dari 6 angka tersedia)

T_3= Meletakkan sebuah angka yang berbeda dengan dua angka yang sudah diletakkan pada posisi satuan dan ribuan untuk diletakkan pada **posisi ratusan**, hal ini dapat dilakukan **4**cara (karena dua angka sudah diletakkan pada posisi satuan dan ribuan sehingga tersisa 5 angka dari 6 angka tersedia)

T4 = Meletakkan sebuah angka yang berbeda dengan tiga angka yang sudah diletakkan pada posisi satuan, ribuan dan ratusan untuk diletakkan pada **posisi puluhan**, hal ini dapat dilakukan **3** cara (karena tiga angka sudah diletakkan pada posisi ribuan, ratusan, dan puluhan sehingga tersisa 3 angka dari 6 angka tersedia)

Berdasarkan aturan perkalian, maka prosedur tersebut dapat terjadi dalam

$$\frac{T_2}{5}\ \frac{T_3}{4}\ \frac{T_4}{3}\ \frac{T_1}{3} \Rightarrow \frac{T_2 \wedge T_3 \wedge T_4 \wedge T_1}{5\times 4\times 3\times 3 = 180}\ cara$$

Jadi, banyak bilangan genap empat angka yang dapat dibentuk dari angka-angka 1, 2, 3, 4, 7, 8 jika pengulangan tidak diperbolehkan adalah 180

(c) Prosedur :

Membentuk sebuah bilangan 4-angka yang lebih besar dari 4000 yang terdiri dari angka 1, 2, 3, 4, 7, 8 dengan syarat pengulangan angka tidak diperbolehkan (misal bilangan: 4123, 4231, 4312, dll).

Mengingat bilangan yang dibentuk berupa bilangan yang lebih besar dari 4000 maka angka pada *posisi ribuan* harus meletakkan sebuah angka yang lebih besar atau sama dengan 4 dan angka pada tiga posisi lainnya yaitu ratusan, puluhan, dan satuan bisa dipilih salah satu dari 5 angka sisanya. Karena susunan bilangan 4 angka maka prosedur ini dapat dipecah menjadi 4 tugasyang saling bebas sebagai berikut. Namakan tugas-tugas tersebut sebagai T_1, T_2, T_3, dan T_4.

T_1= Meletakkan sebuah angka pada **posisi ribuan**, hal ini dapat dilakukan **3**cara(karena tersedia 3 angka ≥ 4 , yaitu angka : 4, 7 dan 8).

T_2= Meletakkan sebuah angka yang berbeda dengan angka ribuan untuk diletakkan pada **posisi ratusan**, hal ini dapat dilakukan **5** cara(karena salah satu angka sudah diletakkan pada posisi ribuan sehingga tersisa 5 angka dari 6 angka tersedia).

T_3= Meletakkan sebuah angka yang berbeda dengan dua angka yang sudah diletakkan pada posisi ribuan dan ratusan untuk diletakkan pada **posisi puluhan**, hal ini dapat dilakukan **4** cara (karena dua angka sudah diletakkan pada posisi ribuan dan ratusan sehingga tersisa 4 angka dari 6 angka tersedia).

T4= Meletakkan sebuah angka yang berbeda dengan tiga angka yang sudah diletakkan pada posisi ribuan, ratusan, dan puluhan untuk diletakkan pada **posisi satuan**, hal ini dapat dilakukan **3** cara (karena tiga angka sudah diletakkan pada posisi ribuan, ratusan, dan puluhan sehingga tersisa 3 angka dari 6 angka tersedia).

Berdasarkan aturan perkalian, maka prosedur tersebut dapat terjadi dalam

$$\frac{T_1}{3}\ \frac{T_2}{5}\ \frac{T_3}{4}\ \frac{T_{14}}{3} \Rightarrow \frac{T_2 \wedge T_3 \wedge T_4 \wedge T_1}{3 \times 5 \times 4 \times 3 = 180}\, cara$$

Jadi, banyak bilangan empat angka yang lebih besar dari 4000 dapat dibentuk dari angka-angka 1, 2, 3, 4, 7, 8 dengan syarat pengulangan angka tidak diperbolehkan adalah 180.

Contoh 1.4

Misalkan A = $\{x_1,x_2,x_3, \ldots,x_t\}$, dan B = $\{y_1,y_2,y_3, \ldots,y_n\}$

(a)Tentukan banyaknya fungsi dari A ke B ?

(b)Tentukan banyaknya fungsi satu-satu dari A ke B ?

Penyelesaian

Fungsif :$A \rightarrow B$ *adalah suatu relasi khusus yang memasangkan setiap anggota himpunan A dengn tepat satu pada anggota himpunan B*

(a) Prosedur :

Memasangkan setiap anggota A dengan tepat satu pada anggota B.

Karena $|A|$ = t, maka prosedur ini dapat dipartisi menjadi t tugas yang saling bebas. Namakan tugas-tugas tersebut sebagai T_1, T_2, T_3,..,T_t.

T_1= Memasangkan $x_1 \in$ A dengan tepat satu pada anggota B, hal ini dapat dilakukan dengan ***n***cara (kenapa?)

T_2= Memasangkan $x_2 \in$ A dengan tepat satu pada anggota B, hal ini dapat dilakukan dengan ***n***cara (kenapa?)

T_3= memasangkan $x_3 \in$ A dengan tepat satu anggota B,hal ini dapat dilakukan dengan ***n***cara (kenapa?)

$\vdots$ $\vdots$

T_t= Memasangkan $x_t \in$ A dengan tepat satu anggota B,hal ini dapat dilakukan dengan *n*cara (kenapa?)

Berdasarkan aturan perkalian,maka prosedur tersebut dapat terjadi dalam

$$\frac{T_1}{n}\ \frac{T_2}{n}\ \frac{T_3}{n}\ldots\frac{T_t}{n} \Rightarrow \frac{T_1 \wedge T_2 \wedge T_3 \wedge \ldots \wedge T_t}{\underbrace{n \times n \times n \times \ldots \times n}_{sebanyak\ \ t\ kali} = n^t}\ cara$$

Jadi, banyak fungsi dari himpunan A ke himpunanB adalahn^t

(b)*Fungsif* : A$\rightarrow$*B dikatakan fungsi satu-satu jika hanya jika setiap dua anggota himpunan A yang berbeda dipasangkan pada setiap anggota himpunan B yang berbeda, yang disimbolkan dengan* $"\forall\ x_i, x_j \in A, x_i \neq x_j \rightarrow f(x_i) \neq f(x_j)"$

Catatan :Jika$t$ *>n maka tidak ada fungsi satu—satu dari A ke B* sehingga $t \leq n$ (kenapa?)

Prosedur :

Memasangkan setiap anggot A dengan tepat satu ke anggota B sedemikian sehingga setiap dua anggota A yang berbeda dipasangkan dengan dua anggota B yang berbeda.

Karena $|A|$ = *t*, maka prosedur ini dapat dipecah menjadi *t* tugas yang saling bebas. Namakan tugas-tugas tersebut sebagai T_1, T_2, T_3,...,T_t .

T_1= Memasangkan $x_1 \in$ A dengan tepat satu ke anggota B, hal ini dapat dilakukan dengan ***n***cara. (kenapa?)

T_2= Memasangkan $x_2 \in$ A dengan tepat satu ke anggota B sedemikian hingga $f(x_2) \neq f(x_1)$.dengan kata lain pasangan $x_2$berbeda dengan pasangan x_1 sebelumnya, hal ini dapat dilakukan dengan ***(n-1)***cara

T_3= Memasangkan $x_3 \in$ A dengan tepat satu ke anggota Bsedemikian hingga $f(x_3), f(x_2), f(x_1)$ berbeda,dengan kata lain pasangan x_3 berbeda dengan pasangan dua elemen$\in$A sebelumnya, hal ini dapat dilakukan dengan **(*n*-2)**cara

$\vdots$ $\vdots$

T_t= Memasangkan $x_t \in$ A dengan tepat satu ke anggota B sedemikian hingga $f(x_3),\ f(x_2),\ f(x_1),\ldots,\ f(x_t)$ berbeda. dengan kata lain pasangan x_t berbeda dengan pasangan $(t-1)$ elemen $\in$ A sebelumnya, hal ini dapat dilakukan dengan **(*n*-(*t*-1)) = (*n*-*t*+1)**cara

Berdasarkan aturan perkalian secara umum, maka prosedur tersebut dapat terjadi dalam

$$\frac{T_1}{n}\ \frac{T_2}{n-1}\ \frac{T_3}{n-2}\cdots\frac{T_t}{n-t+1} \Rightarrow \frac{T_1 \wedge T_2 \wedge T_3 \wedge \ldots \wedge T_t}{n\,(n-1)(n-2)\ldots.\,(n-t+1)}\, cara$$

Jadi, banyak fungsi satu-satu dari A ke B adalah $n\,(n-1)\,(n-2)\ldots.(n-t+1)$

1.2 Aturan Penambahan

Secara khusus aturan penambahan dinyatakan sebagai berikut.

Aturan Penambahan Secara Khusus

Misal suatu prosedur dapat dipartisi menjadi barisan dua tugas yang saling lepas.Jika tugas pertama dapat terjadi dalam $n_1$cara, secara terpisah tugas keduadapat terjadi dalamn_2 cara, maka prosedur tersebut dapat terjadi dalam$n_1 + n_2$ cara

Aturan di atas disederhanakan secara simbolis berikut.

$$\frac{T_1}{n_1}\ \frac{T_2}{n_2} \Rightarrow \frac{T_1 \vee T_2}{n_1 + n_2}\, cara$$

Catatan

1) Simbol " $\frac{T_i}{n_1}$ " dibaca "tugas ke-*i* dapat terjadi dalam n_i cara", dengan $i \in \mathbb{N}$
2) Symbol " $\vee$ " melambangkan kata penghubung "*atau*" yang menyatakan hubungan dua kejadian yang saling lepas.
3) Dua atau lebih tugas dikatakan saling lepas jika tugas-tugas tersebut tidak terjadi dalam waktu yang bersamaan.

Contoh 1.5

Ada dua cara bepergian dari bima menuju Jakarta, yaitu menggunakan Kapal terbang atau kapal laut. Untuk kapal terbang ada 4 penerbangan, dan kapal laut ada 3 kapal. Berapa banyak cara untuk pergi dari Bima ke Jakarta?.

Penyelesaian

Prosedur :

Menentukan cara bepergian dari Bima ke Jakarta dengan menggunakan kapal terbang atau kapal laut.

Karena cara bepergian dari Bima ke Jakarta dengan menggunakan pesawat dan kapal laut merupakan dua hal yang terpisah, maka Prosedur tersebut dapat dipecah menjadi dua tugas yang saling lepas. Namakan tugas-tugas tersebut sebagai T_1, atau T_2 .

T_1= Bepergian dari Bima ke Jakarta dengan menggunakan kapal terbang, hal ini dapat dilakukan dengan **4** cara.

atau

T_2= Bepergian dari Bima ke Jakarta dengan menggunakan kapal laut, hal ini ini dapat dilakukan dengan **3** cara

Berdasarkan aturan penambahanmaka prosedur tersebut dapat terjadi dalam

$$\frac{T_1}{4} \quad \frac{T_2}{3} \Rightarrow \frac{T_1 \vee T_2}{4+3=7} \quad cara$$

Jadi, ada 7 cara untuk pergi dari Bima ke Jakarta.

Contoh 1.6

Dua buah dadu dilambungkan sekali secara bersama-sama. Berapa banyak cara mendapatkan jumlah angka 4 atau 8?

Penyelesaian

Prosedur :

Melambungkan dua buah dadu sebanyak satu kali secara bersama-sama sedemikian hingga diperoleh mata dadu berjumlah angka 4 ***atau*** angka 8.

Misalkan hasil lambungan tersebut disimbolkan dengan (m,n) yang menyatakan bahwa dadu pertama muncul angka m dan dadu kedua muncul angka n sehingga jumlah kedua angka tersebut $m + n$. Prosedur ini dapat dipartisi menjadi 2 tugas yang saling lepas sebagai berikut. Namakan tugas-tugas tersebut sebagai T_1, dan T_2.

T_1= Melambungkan duah buah dadu secara bersama-sama sekali sehingga diperoleh mata dadu berjumlah angka 4, yaitu: (1, 3), (2,2), dan (3,1). Tugas ini ini dapat dilakukan dengan **3** cara.

atau

T_2= Melambungkan duah buah dadu secara bersama-sama sekali sehingga diperoleh mata dadu berjumlah angka 8, yaitu: (2, 6), (3,5), (4,4), (5, 3), (6,2). Tugas ini ini dapat dilakukan dengan **5** cara.

Berdasarkan aturan penambahan, maka prosedur tersebut dapat terjadi dalam

$$\frac{T_1}{3} \quad \frac{T_2}{5} \Rightarrow \frac{T_1 \vee T_2}{3+5} = 8\,cara$$

Jadi, banyak cara mendapatkan jumlah angka 4 atau 8 dari hasil melambungkan dua buah dadu berbeda warna (merah dan putih) sebanyak satu kali secara bersama-sama adalah 8.

Aturan penambahan selanjutnya diperluas sebagai berikut

Aturan Penambahan Secara Umum

Misal suatu prosedur dapat dipartisi menjadi barisan k tugas yang saling lepas, dengan $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$. Namakan tugas-tugas tersebut sebagai T_1, T_2, T_3,.., T_k. Jika T_1, T_2, T_3,..,atau T_k secara terpisah dapat terjadi dalam n_1, n_2, n_3, …, atau n_k cara, maka prosedur tersebut (T_1 atau T_2 atau T_3,.., *atau* T_k) dapat terjadi dalam $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k$ *cara*

Aturan di atas disederhanakan secara simbolis berikut.

$$\frac{T_1}{n_1}\ \frac{T_2}{n_2}\ \frac{T_3}{n_3} \ldots \frac{T_k}{n_k} \Rightarrow \frac{T_1 \vee T_2 \vee T_3 \vee \ldots \vee T_k}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k}\ cara$$

Contoh 1.7

Sebuah keranjang memuat 10 buah bola berwarna merah, 8 buah bola berwarna biru, 5 buah bola berwarna hijau. Masing-masing bola dianggap berbeda. Berapa jumlah cara memilih sebuah bola (warna sembarang)?.

Penyelesaian

Prosedur :

Menentukan jumlah cara memilih sebuah bola (sembarang warna) dalam sebuah keranjang yang terdiri 10 buah bola (berbeda) berwarna merah, 8 buah bola (berbeda) berwarna biru, dan 5 buah bola (berbeda) berwarna hijau.

Dalam menentukan jumlah bola jika dipilih sebuah bola (sembarang warna) maka ada tiga tugas yang saling terpisah yaitu memilih sebuah bola berwarna merah **atau** sebuah bola berwarna biru **atau** sebuah bola berwarna hijau. Berdasarkan aturan penambahan, maka prosedur tersebut dapat terjadi dalam

$$\frac{T_1}{10}\ \frac{T_2}{8}\ \frac{T_3}{5} \Rightarrow \frac{T_1 \vee T_2 \vee T_3}{10+8+5} = 23\ cara$$

Jadi, jumlah cara memilih sebuah bola (sembarang warna) adalah 24.

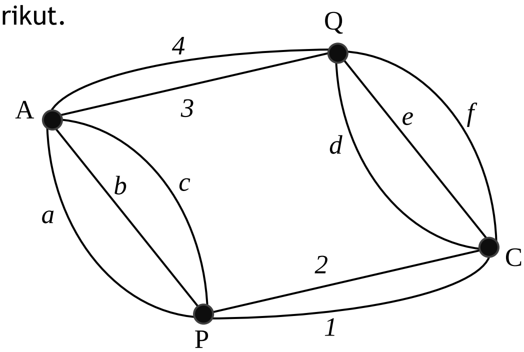
Dari **contoh 1.7**, berapa jumlah cara memilih 3 buah bola, masing-masing dari tiap bola berbeda warna?. Jawaban dari persoalan ini dibiarkan sebagai tugas.

1.3 Prinsip Dasar Pencacahan Majemuk

Seringkali kita menemukan permasalahan yang menuntut kita untuk menyelesaikannya dengan menggunakan teknik perkalian dan teknik penambahan sekaligus. Prinsip pencacahan seperti ini disebut prinsip pencacahan **majemuk**. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.7

Ada dua alternatif bepergian menuju kota *C* dari kota *A*, yaitu melalui kota *P* atau *Q*. Banyak jalan yang menghubungkan kota yang ada dapat dilihat pada gambar berikut.

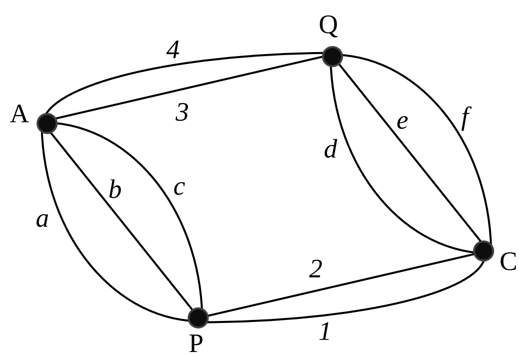


Tentukan banyak cara bepergian dari kota A ke kota C melalui kota *P* atau *Q tersebut?*

Penyelesaian

Prosedur :

Menentukan cara bepergian dari kota A ke kota C melalui kota *P* atau *Q* .



Perhatikan gambar di atas, cara bepergian dari kota A menuju kota C ada dua jalur yang saling terpisah yaitu melalui kota P atau melalui kota Q. Dengan demikian prosedur tersebut dapat dipartisi menjadi dua tugas yang ***saling lepas*** (namakan T_1 dan T_2). NamunT_1 dapat dipartisi lagi menjadi 2 dua tugas yang saling bebas (namakan K_1, dan K_2), begitupun juga dengan T_2 dapat dipartisi lagi menjadi 2 tugas yang saling bebas (namakan R_1 dan R_2). Uraian tugas dari masing-masing prosedur tersebut sebagai berikut.

T_1= Bepergian dari Kota A menuju kota C melalui kota P (dari kota A ke Kota P, dan dari kota P ke kota C), yaitu:

- K_1= Bepergian dari Kota A ke Kota P dapat dilakukan dengan **3** cara (karena ada tiga jalan yang menghubungkan kota A ke kota P, yaitu : *a*, *b*, dan *c*)
- K_2= Bepergian dari Kota P ke Kota C dapat dilakukan dengan **2** cara (karena ada dua jalan yang menghubungkan kota P ke kota Q, yaitu : *1*, dan 2)

Berdasarkan aturan perkalian prosedur T_1 dapat terjadi dalam

$$\frac{K_1}{3}\ \frac{K_2}{2} \Rightarrow \frac{K_1 \wedge K_2}{3\times 2 = 6}\ cara$$

Sehingga

banyak cara bepergian dari kota A ke Kota C melalui P ada 6…...………(*)

atau

T_2= Bepergian dari Kota A menuju kota C melalui kota Q (dari kota A ke Kota Q, dan dari kota Q ke kota C), yaitu:

- R_1= Bepergian dari Kota A ke Kota Q dapat dilakukan dengan **2** cara (karena ada dua jalan yang menghubungkan kota A ke kota Q, yaitu : 3 dan 4)
- R_2= Bepergian dari Kota P ke Kota C dapat dilakukan dengan **3** cara (karena ada tiga jalan yang menghubungkan kota P ke kota Q, yaitu : *d*,*e*, dan *f*)

Berdasarkan aturan perkalian, T_2 dapat terjadi dalam

$$\frac{R_1}{2}\ \frac{R_2}{3} \Rightarrow \frac{K_1 \wedge K_2}{2\times 3 = 6}\ cara$$

Sehingga,

banyak cara bepergian dari kota A ke Kota C melalui Q ada 6(**)

Dari persamaan (*) dan (**), maka berdasarkan aturan penambahan prosedur T_1 atau T_2 dapat terjadi dalam

$$\frac{T_1}{6}\ \frac{T_2}{6} \Rightarrow \frac{T_1 \vee T_2}{6+6 = 12}\ cara$$

Jadi, ada 12 cara bepergian menuju kota C dari kota A melalui kota P atau Q.

D. Latihan 1

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan langkah-langkah yang jelas, tepat dan benar sertakan alasan yang Anda gunakan untuk memperoleh jawaban tersebut?

1. Menjelang pergantian pengurus Himpunan Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika (HMPS-PM) akan dibentuk sepasang pengurus dalam musyawarah besar, yaitu seorang ketua dan seorang sekertaris. Terdapat 15 calon pengurus yang dapat dipilih terdiri dari semua semester ganjil yaitu 2 orang dari semester I, 4 orang dari semester III, 6 orang dari semester V dan 3 orang dari semester VII. Ada berapa banyak formasi pengurus HMPSPM yang dapat dibentuk jika setiap orang tidak boleh merangkap jabatan dengan syarat:
   a. Calon pengurus tidak memperhatikan delegasi semester?
   b. calon pengurus tidak boleh dari semester yang sama?

2. Perhatikan Gambar di bawah ini merupakan salah satu kain tenun khas daerah Bima yaitu "Tembe nggoli" bermotif zig-zag.

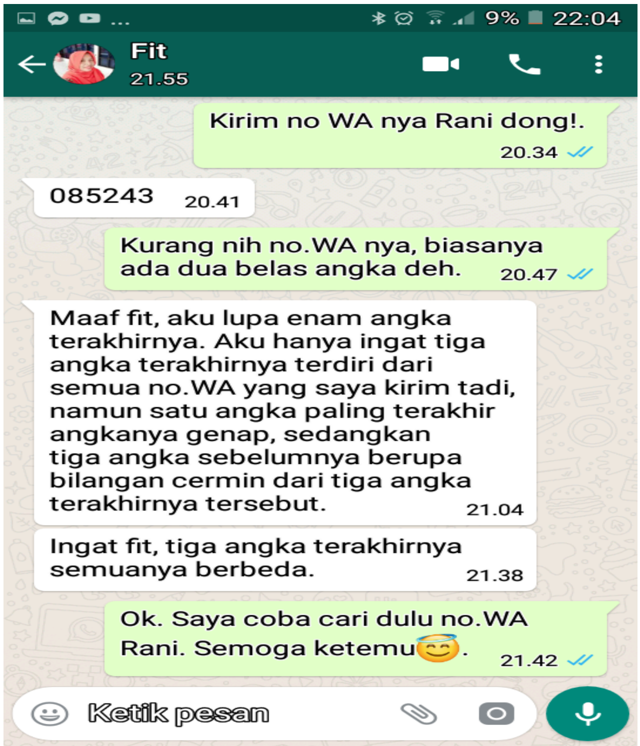
   Pada gambar kain tenun di atas!, motif zig-zag terdiri dari delapan warna berbeda. Diantara motif zig-zag tersebut ditambahkan motif berbagai bangun datar segi-n tidak beraturan yang sejenis namun warnanya berbeda (memiliki warna yang sama dengan motif zig-zag). Berapa banyak kain "tembe nggoli" yang dapat dibuat jika warna segi-n yang terletak diantara dua motif zig-zag harus berbeda dengan warna motif zig-zag yang mengapitnya, dengan $4 \leq n \leq 8$?

3. Seseorang menulis susunan bilangan yang terdiri dari angka-angka pada bilangan bulat positif. Tentukan :
   (a) Banyaknya bilangan yang terdiri dari satu, dua, tiga, empat, lima atau enam angka sedemikian hingga tidak ada angka yang sama dan bilangan yang terdiri dari dua atau tiga angka tidak boleh diawali dengan angka nol?
   (b) Banyaknya muncul angka 1 pada bilangan yang terdiri 1, 2, 3,…., 2019 angka?
   (c) Banyaknya bilangan tiga angka pada (a) dan habis dibagi 5
   (d) Banyak bilangan cantik enam angka

   Catatan : suatu bilangan dikatakan cantik jika saat dibaca dari kiri kekanan 0, 1, 2, 3, 4 membentuk barisan naik; sedangkan 5, 6,7, 8,9 membentuk barisan turun; Angka 0 tidak boleh berada pada ujung kiri. Sebagai contoh, 980123, 760234 adalah susunan cantik.
4. Misalkan, A = $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_r\}$, B = $\{b_1, b_2, b_3, ..., b_s\}$.Tentukan :
   (a) Banyak fungsi dari himpunan B ke himpunan A?
   (b) Banyak fungsi satu-satu dari himpunan B ke himpunan A?
5. Misalkan, X = $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_{2019}\}$. Ada berapa banyak himpunan bagian X yang anggotanya sebanyak *1, 2, 3, …, atau 2018* ?
6. Berapa banyak jumlah kata 6-huruf yang dapat dibentuk dari huruf –huruf alfabet, jika :
   (a) tidak boleh ada huruf yang berulang dalam kata?
   (b) pengulangan huruf diperbolehkan?
   (c) pada jawaban soal (a) huruf vokal tidak saling berdekatan
7. Sebuah plat nomor kendaraan pada suatu negara diawali satu atau dua huruf, diikuti empat angka, dan diakhiri dua atau satu huruf. Berapa banyak plat nomor mobil yang dapat dibentuk ?
   (a) jika tidak boleh ada huruf yang sama dan tidak ada angka yang sama
   (b) jika huruf dan angka boleh ada yang sama.
   (c) dua huruf pertama adalah EA, tidak ada angka yang sama dan tidak ada huruf yang sama.
8. Ada berapa banyak kejadian munculnya mata dadu berjumlah k + 3 dari pelemparan k buah dadu (dengan 6 sisi) sebanyak satu kali

9.

BILANGAN CERMIN

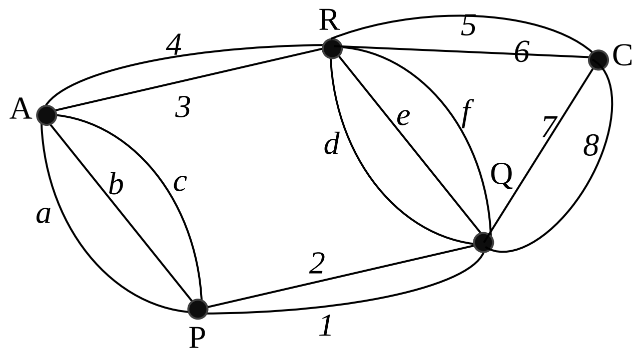


Perhatikan gambar di atas!. Dua orang sahabat sedang chatting (berdiskusi) melalui WhatsApp (WA) untuk menemukan nomor WA sahabatnya Rani. Banyak nomor WA yang dapat dihubungi agar nomor WA Rani dapat ditemukan adalah…

Catatan :

bilangan cermin adalah bilangan yang memiliki unsur yang sama dari bilangan semula namun dalam urutan terbalik. Contoh: bilangan cermin dari bilangan **123** adalah **321** **sehingga jika digabung kedua bilangan itu menjadi 321123**

10. Untuk menuju kota *C* dari kota *A* ada dua alternatif yaitu melalui kota *P dan Q* atau *R*. Banyak jalan yang menghubungkan kota yang ada dapat dilihat pada gambar berikut.



Tentukan banyak cara bepergian dari kota A ke kota C dan kembali lagi ke kota A melalui kota *P* dan *Q* atau *R* dengan syarat tidak boleh melalui jalan yang sama?

A. Capaian Pembelajaran Mata kuliah (CPMK)

Mahasiswa mampu menjelaskan permutasi dan kombinasi, kemudian membuktikan teorema terkait permutasi dan kombinasi serta menerapkan teorema-teorema tersebut untuk memecahkan masalah sehari-hari dan mengembangkan nya melalui kinerja mandiri, tanggung jawab dan pantang menyerah

B. Kemampuan Akhir yang Diharapkan (Sub-CPMK)

1. Menjelaskan definisi permutasi
2. Menjelaskan arti n! , 0! dan menggunakannya.
3. Membedakan berbagai jenis permutasi (permutasi tampa pengulangan , permutasi dengan pengulangan, permutasi dengan beberapa unsur yang sama dan permutasi siklik
4. Mengidentifikasi sebuah problem untuk menemukan formula banyaknya permutasi tampa pengulangan permutasi dengan pengulangan, permutasi siklik, dan permutasi dengan beberapa unsur yang sama **(**serta membuktikannya.
5. Menerapkan teorema terkait permutasi untuk menyelesaikan masalah sehari-hari
6. Menjelaskan definisi kombinasi dan menjelaskan perbedaan kombinasi dengan permutasi
7. Membedakan berbagai jenis kombinasi (kombinasi tampa pengulangan dan kombinasi dengan pengulangan)
8. Mengidentifikasi sebuah problem untuk menemukan formula banyaknya kombinasi dengan pengulangan dan banyaknya kombinasi tampa pengulangan serta membuktikannya
9. Menerapkan teorema kombinasi untuk menyelesaikan masalah sehari-hari
10. Mengembangkan terapan teorema kombinasi untuk menyelesaikan persoalan banyaknya lintasan pada kisi berukuran (*m x n*) yaitu C_{mn} = ***C(m+n, n)*** atau **C(m+n, m)**
11. Mengembangkan terapan kombinasi untuk menyelesaikan persoalan banyak lintasan cantik pada sebuah kisi-kisi berukuran *n x n* yang selanjutnya disebut bilangan **catalan**

$$C_n = \frac{1}{n+1} C(2n, n)$$

C. Materi

Seringkali kita menghitung banyaknya cara pengaturan objek dengan memperhatikan urutan atau tidak. Cara pengaturan objek dengan memperhatikan urutan disebut *permutasi*. Sedangkan cara pengaturan objek tampa meperhatikan urutannya disebut *kombinasi*.Berikut uraian selengkapnya mengenai permutasi dan kombinasi berserta aplikasinya

2.1 Permutasi

Definisi 2.1.Permutasi

Permutasi adalah susunan dari himpunan objek-objek dengan memperhatikan urutannya.

Terdapat tiga jenis permutasi yang dibahas pada buku ini, antara lain: permutasi dengan *n* anggota berbeda, pemutasi dengan beberapa unsur yang sama, dan permutasi siklik. Uraian dari masing-masing permutasi yang dimaksud sebagai berikut.

2.1.1 Permutasi dengan *n* Anggota Berbeda

Ada dua jenis permutasi dengan *n* anggota berbeda yaitu permutasi dengan *n* anggota berbeda tampa pengulangan, dan permutasi dengan *n* anggota berbeda dimana pengulangan elemen-elemenya diperbolehkan. Untuk memahami permutasi dengan *n* anggota berbeda tersebut perhatikan kasus berikut.

Misal S = {a,b,c,d}.Tabel berikut menunjukkan permutasi 3 dari 4 elemen S tampa pengulangan

Tabel 2. 1. Permutasi 3 Dari Empat Elemen S

Baris ke-	Permutasi 3 dari 4 elemen S
1	abc, acb, bca, bac, cab, cba
2	abd, adb, bda, bad,dab, dba
3	acd, adc, cda, cad,dac, dca
4	bcd, bdc, cdb, cbd,dbc, dcb

Berdasarkan tabel di atas, susunan yang terletak pada baris ke-1 yaitu, abc, acb, bca, bac, cab, dan cba merupakan susunan dari himpunan 3 elemen yang disusun dari elemen *a*,*b*, dan *c* pada S yang urutannya diperhatikan. *Memperhatikan urutan berarti memandang minimal satu elemen pada sebuah susunan 3 elemen S tersebut diletakkan pada urutan berbeda pada susunan 3 elemen S lainnya*. Misal elemen *b, c* pada susunan *abc* berbeda dengan susunan *acb*, karena posisi elemen *c*, dan *b* pada susunan *acb* masing-masing terletak pada urutan ke-2 dan ke-3 dari susunan *abc* sebelumnya. Semua susunan pada baris ke-1, ke-2, ke-3, dan ke-4 pada tabel di atas merupakan permutasi 3 dari 4 elemen *S* tampa pengulangan. Sedangkan susunan seperti : *aaa*, *aab*, *abb*, *bbb*, *baa*, bba, *ccc*, atau *ddd* merupakan beberapa contoh permutasi 3 dari 4 elemen *S* dengan pengulangan elemen-elemenya diperbolehkan. Jika pengulangan tidak diperbolehkan maka banyaknya permutasi 3 dari 4 elemen S berdasarkan uraian di atas adalah 24 yang disimbolkan dengan“P(4,3)= 24”

Dari uraian di atas, dapat dikatakan bahwa permutasi merupakan sub himpunan dari S.

Catatan

1) P(n,r) = Banyaknya permutasi *r* dari himpunan S yang mempunyai *n* anggota berbeda tampa pengulangan
2) P*(n,r) = Banyaknya permutasi *r* dari himpunan S yang mempunyai*n* anggota berbeda dengan pengulangan
3) Beberapa literatur lain menyatakan Simbol“P(n,r)”dinyatakan dengan simbol“ ${}^{n}P_{r}$ ”

Sebelum melanjutkan materi permutasi, akan diperkenalkan terlebih dahulu operator faktorial yang didefinisikan secara formal berikut.

Definisi 2.2 :*n*!= *n*(*n*-1)(*n*-2)...3.2.1, dengan *n* anggota bilangan bulat positif. Notasi “*n*!” dibaca “*n* factorial”.

Berdasarkan definisi **2.1** kita akan memperoleh bentuk ekuivalennya sebagai berikut.

1) *n*! = *n*(*n*-1)!, atau
2) $\frac{n!}{n} = (n-1)!$ atau
2) $n = \frac{n!}{(n-1)!}$

Contoh 2.1

1. Tentukan hasil dari
   a. 5!
   b. $\frac{10!}{8!}$
   c. $\frac{p!}{(p-q)!}$

2. Nyatakan dalam bentuk faktorial bentuk perkalian berikut!
   a. 4 × 3 x 2× 1 = ...
   b. 8 × 7× 6 = $\frac{....!}{....!}$

c. $p\ (p-1)\ (p-2)\ (p-3)...(p-t+1) = \frac{(....)!}{(....)!}$

Penyelesaian

1. a. 5! = 5 × 4 × 3 x 2× 1

 b. $\frac{10!}{8!} = \frac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1} = 10\times9 = 90$

 c. $\frac{p!}{(p-q)!} =$

$$\frac{p(p-1)(p-2)...(p-q+1)(p-q)(p-q-1)(p-q-2)....\ 3.2.1}{(p-q)(p-q-1)(p-q-2)....\ 3.2.1}$$

$$= p(p-1)(p-2)...(p-q+1)$$

2. Bentuk faktorial dari perkalian berikut!

 a. 4 × 3 x 2× 1 = 4!

 b. 8 × 7× 6 = $\frac{8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{5\times4\times3\times2\times1} = \frac{8!}{5!}$

 c. $p\ (p-1)\ (p-2)\ (p-3)...(p-t+1)$

$$= \frac{p(p-1)(p-2)...(p-t+1)(p-t)(p-t-1)(p-t-2)....\ 3.2.1}{(p-t)(p-t-1)(p-t-2)....\ 3.2.1}$$

$$= \frac{p!}{(p-t)!}$$

Melalui operasi faktorial dan mengacu pada kasus I di atas kita dapat menentukan banyaknya permutasi *r* dari *n* objek berbeda dengan menggunakan teorema berikut.

Teorema 2.1 Banyaknya Permutasi liniear Tampa Pengulangan

Jika *n, r* $\in Z^+$ dengan $r \leq n$, *dan* P(n,r) menyatakan banyaknya permutasi *r* dari himpunan S yang mempunyai *n* anggota berbeda tampa pengulangan,maka

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Bukti Teorema 2.1

Misal ***S*** himpunan yang mempunyai *n* elemen berbeda. Perhatikan sebuah permutasi *r* dari *S* tampa pengulangan

Prosedur

Menyusun sebanyak *r* elemen *S* tampa pengulangan

Prosedur tersebut dapat dipartisi menjadi *r* tugas yang saling bebas. Namakan tugas-tugas tersebut sebagai $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_r$.

T_1= Memilih sebuah elemen S untuk diletakkan pada posisi pertama, Hal dapat dilakukan dengan ***n*** cara (karena pada S ada *n* anggota).

T_2= Memilih sebuah elemen S yang berbeda dengan elemen yang telah dipilih pada elemen pertama, hal ini dapat dilakukan dengan **(n-1)**cara.

T_3= Memilih sebuah elemen S yang berbeda dengan elemen yang telah dipilih pada dua elemen sebelumnya, hal ini dapat dilakukan dengan **(n-2)**cara.

$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$

T_r= Memilih sebuah elemen S yang berbeda dengan elemen yang telah dipilih pada *(r-1) elemen* sebelumnya, hal ini dapat dilakukan dengan *n*-(*r*-1) = **(*n*-*r*+1)**cara.

Berdasarkan aturan perkalian, maka prosedur tersebut dapat dilakukan dengan

$$\frac{T_1}{n}\ \frac{T_2}{n-1}\ \frac{T_3}{n-2} \cdots \frac{T_r}{n-(r-1)} \Rightarrow \frac{T_1 \wedge T_2 \wedge T_3 \wedge \ldots \wedge T_r}{n(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1)} \text{ cara}$$

sehingga

$$P(n,r) = n(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1) \qquad (*)$$

$$= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-r+1)\,(n-r)\,(n-r-1)\,(\,n-r-2)\ldots3.\,2.1}{(n-r)\,(n-r-1)\,(\,n-r-2)\ldots3.\,2.1}$$

(lihat penyelesaian **contoh 2.1**)

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$ (definisi **2.2**)

Jadi, teorema 2.1 terbukti menggunakan aturan perkalian

Dari persamaan(*****)diperoleh

Khususnya $r = n$, maka P(*n*,*n*) $= n(n\text{-}1)(n\text{-}2)\ \ldots.1$

$= n!$ (**)

Selanjutnya kita tunjukkan persamaan(***) berikut dengan menggunakan teorema **2.1** hasilnya juga harus sama dengan persamaan (**) di atas.

Jika $r = n$,maka P(n,n)= $\dfrac{n!}{(n-n)!} = \dfrac{n!}{0!} \to \dfrac{n!}{1}$ = n! (***)

definisikan 0! =1

Perhatikan dengan menggunakan teorema 2.1 kita akan menemukan nilai pada bagian penyebutnya adalah 0! (persamaan(***)). Agar persamaan (**) = persamaan (***) bernilai benar maka haruslah bilangan penyebut pada proses penyelesaian persamaan (***) diganti dengan bilangan 1. Sehingga *0!* Didefinisikan secara formal dalam definisi 2.3 berikut.

Definisi 2.3 : 0! = 1

Contoh 2.2

Ada berapa banyak permutasi dari tiga angka yang dapat dibentuk dari angka 1, 3, 4, 6, 7

Penyelesaian

Dalam hal ini urutan angka diperhatikan. Susunan seperti : 134, 143, 314, 341, 467 adalah beberapa contoh permutasi yang dimaksud. Karena n = 5, dan r = 3, maka banyak permutasi dari tiga angka yang dibentuk dari lima angka tersebut adalah

$$P(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5.4.3.2!}{2!} = 60$$

Catatan: Jika semua angka dipermutasikan maka banyak permutasi lima angka adalah 5! = 5.4.3.2.1 = 120

Contoh 2.3

Sebanyak 15 calon pengurus Badan Eksekutif Mahasiswa (BEM) akan dipilih menjadi seorang ketua, sekertaris dan bendahara. Ada berapa cara memilih jika:

a. tidak ada persyaratan;

b. hanya 3 calon yang bersedia menjadi ketua;

Penyelesaian

a. Perhatikan bahwa dalam pemilihan pengurus BEM kita memperhatikan posisi/jabatan calon pengurus tersebut. Misalnya, susunan ABC menyatakan A sebagai ketua, B sebagai sekertaris, dan C sebagai bendahara, jelas berbeda dengan susunan BCA yang menyatakan B sebagai ketua, C sebagai sekertaris, dan A sebagai bendahara. Sehingga ini termasuk persoalan permutasi. Dalam hal ini n = 15, r = 3 maka

$$P\ (15,3) = = \frac{15!}{(15-3)!} = \frac{15.14.13.12!!}{12!} = 2730$$

Jadi, ada 2730 cara memilih 15 calon pengurus BEM untuk menjadi pengurus sebagai ketua, sekertaris, dan bendahara.

b. Posisi ketua hanya dapat diisi oleh 3 dari 15 calon, sehingga ada 3 cara untuk memilih ketua. Setelah 1 orang terpilih sebagai ketua maka tinggal 14 calon pengurus BEM lainnya yang dapat dipilih untuk menduduki jabatan sebagai bendahara dan sekertaris. Hal ini berarti ada P(14,2) $= \frac{14!}{(14-2)!} = \frac{14!}{12!} = \frac{14.13.12!!}{12!}$ = 182 cara.

   Jadi, ada 3.P(14,2) = 3 × 182 = 546 cara memilih pengurus BEM yang dimaksud.

Contoh 2.4

Perhatikan gambar berikut!

Sumber : pngdownload.id

Lima orang orang mahasiswa baru berpose dalam satu baris seperti pada gambar di atas. Berapa banyak cara menata pose foto kelima mahasiswa baru tersebut jika : (a) tampa syarat; (b) mahasiswa (laki-laki) selalu berdampingan ; (c) setiap mahasiswa (laki-laki) selalu berada di antara mahasiswi (perempuan)

Penyelesaian

(a) Perhatikan bahwa kelima mahasiswa A, B, C, D, dan E dapat bertukar tempat/posisi untuk berpose. Dalam hal ini urutan posisi mereka berpose sangat diperhatikan. Oleh karena itu, banyak cara menata pose foto kelima mahasiswa baru tersebut sama halnya dengan menentukan banyak permutasi dari 5 objek, sehingga

$$P(5, 5) = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Jadi, Banyak cara menata pose foto kelima mahasiswa tersebut adalah $5! = 120$

(b) Kita analogkan mahasiswa laki-laki yang berdampingan (B dan D) sebagai satu objek sehingga kita dapat menata pose foto mereka dalam empat posisi, yaitu : A, BD, C, E.

Banyak cara menata pose mereka adalah $P(4,4) = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Perhatikan juga bahwa kedua mahasiswa laki-laki yang berdampingan tersebut dapat menukar posisi mereka berpose, sehingga cara pose kedua mahasiswa laki-laki saat berdampingan sebanyak $P(2,2) = 2! = 2$.

Jadi, banyak cara menata pose kelima mahasiswa jika mahasiswa laki-laki selalu berdampingan adalah $P(4,4) \times P(2,2) = 4! \times 2! = 24 \times 2 = 48$.

Gambar berikut (i) dan (ii) merupakan dua tampilan mereka berpose dengan cara yang dimaksud.

A B D C E

(i)

A D B C E

(ii)

(c) Misalkan penataan pose setiap mahasiswa (laki-laki) berada diantara mahasiswi dapat ditunjukkan pada kedua gambar berikut.

A B C D E

A D E B C

posisi ke ..	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5

perhatikan bahwa posisi mahasiswa laki – laki berpose ada dua pilihan yaitu di posisi ke-2 atau di posisi ke-4, sehingga banyak cara mahasiswa berpose ada P(2,2) = 2! = 2 cara. Sedangkan posisi mahasiswi berpose ada tiga pilihan yaitu di posisi ke-1, ke-3 atau diposisi ke-5, sehingga banyak cara mahasiswa berpose ada P(3,3) = 3! = 6. Karena ada dua proses yang saling bebas maka banyak cara menata pose kelima mahasiwa jika setiap mahasiswa laki-laki berada diantara mahasiswi adalah P(2,2) x P(3,3)= $2! \times 3!$ = 2 x 6 = 12. Dapatkah Anda menunjukkan ke-12 cara mereka berpose ?

Teorema 2.2 Banyaknya Permutasi liniear dengan Pengulangan

Jika *n, r* $\in Z^+$ dengan $r \leq n$, *dan* $P^*(n,r)$ menyatakan banyaknya permutasi *r* dari himpunan S yang mempunyai *n* anggota berbeda dengan pengulangan,maka

$$P^*(n,r) = n^r$$

Bukti Teorema 2.2

Misal S himpunan yang mempunyai n elemen berbeda. Pikirkan sebuah permutasi *r* dari *S* dengan pengulangan.

Prosedur :

Menyusun sebanyak *r* elemen *S* dengan pengulangan elemen diperbolehkan.

Prosedur tersebut dapat dipartisi menjadi *r* tugas yang saling bebas. Namakan tugas-tugas tersebut sebagai $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_r$.

T_1= Memilih sebuah elemen S untuk diletakkan pada posisi pertama. Hal ini dapat dilakukan dengan ***n***cara (karena pada S ada *n* anggota)

T_2 : memilih sebuah elemen S untuk diletakkan pada posisi kedua dengan pengulangan, hal ini dapat dilakukan dengan ***n***cara

T_3 : memilih sebuah elemen S untuk diletakkan pada posisi ketiga dengan pengulangan. Hal ini dapat dilakukan dengan ***n***cara

⋮ ⋮

T_r : memilih sebuah elemen S untuk diletakkan pada posisi ke-*r* dengan pengulangan. Hal ini dapat dilakukan dengan ***n***cara.

Berdasarkan aturan umum perkalian, maka prosedur terebut dapat dilakukan dengan

$$\frac{T_1}{n}.\frac{T_2}{n}\ \frac{T_3}{n}\ldots\frac{T_r}{n} \Rightarrow \frac{T_1 \wedge T_2 \wedge T_3 \wedge \ldots \wedge T_r}{\underbrace{n \times n \times n \times \ldots \times n = n^r}_{r\ kali}}\ cara$$

sehingga

$$P^*(n,r) = \underbrace{n \times n \times n \times \ldots \times n}_{r\ kali}$$

$$= n^r$$

Contoh 2.5

Untuk merayakan ulang tahun kesuksesan perusahaannya, sebuah perusahaan PT bernama **Xmath** akan membagikan kupon berhadiah berupa bilangan kuarternair tujuh angka. Bilangan kuartenair didefinisikan sebagai bilangan yang dibentuk dari angka “0”, “1’, dan “2” dan “3”.

Ada berapa banyak kupon berhadiah yang harus dibagikan oleh PT Xmath tersebut?

Penyelesaian

Mengingat kuponnya berupa bilangan kuartenair 7-angka, maka dalam hal ini r = 7 dan n = 4. Selanjutnya Karena angka - angka dalam kupon tersebut boleh berulang maka banyaknya kupon berhadiah yang dibentuk dari bilangan kuartenait 7-angka adalah

$$P^*(4,7) = = 4^7 = 16.384$$

Beberapa Nomor Kupon berhadiah yang dimaksud adalah:1133022, 1002233, 0001123, 0110223, 2233000, 2200133, 3300112 dan lain –lain.

2.1.2 Permutasi dengan Beberapa Unsur yang Sama

Pada permutasi yang kita pelajari sebelumnya, semua objek diharuskan berbeda satu dengan yang lain. Dengan kata lain, di antara *n* buah objek -objek yang diatur $(x_1, x_2, x_3,...,x_n)$, $x_i \neq x_j$ jika $i \neq j$. Pada sub bab ini akan dibahas kasus dimana beberapa objek dari *n* objek tersebut sama (sama disini tidak berarti semua *n* objek harus sama, artinya ada beberapa objek dari *n* objek tersebut yang sama). Mari kita awali materi ini dengan contoh berikut.

Contoh 2.2

Misalkan S = {*a*, *a*, *b*}. Tentukan permutasi dari 3 huruf (yang memuat 2 huruf *a*, 1 huruf *b*)?

Penyelesaian

Perhatikan bahwa banyaknya himpunan S di atas ada 3, yang memuat dua anggota yang sama yaitu *a* dan satu anggota berbeda yaitu *b*. Jika kita asumsikan semua huruf berbeda, dengan cara memberikan indeks pada huruf yang sama, maka permutasi 3 huruf (a_1, a_2, b) sebanyak 3! = 6, yaitu :

$$a_1a_2b,\ a_2a_1b,\ a_1ba_2,\ a_2ba_1,\ ba_1a_2,\ ba_2a_1$$

tetapi jika $a_1 = a_2 = a$, maka

$$a_1a_2b = a_2a_1b,\ a_1ba_2 = a_2ba_1,\ dan\ \ ba_1a_2 = ba_2a_1$$

yaitu permutasi a_1 dan a_2 tidak memberikan hal yang berbeda. Banyak permutasi a_1 dan a_2 ini adalah 2!. Oleh karena itu banyaknya permutasi menjadi $\frac{3!}{2!} = 3$ yaitu *aab*, *aba*, dan *baa*, yang ditulis sebagai "P(3;2,1)= $\frac{3!}{2!} = 3$".

Berdasarkan contoh ini, secara umum jika terdapat *n* objek yang tidak seluruhnya berbeda maka banyaknya permutasi dengan beberapa unsur yang sama dapat disajikan dalam teorema **2.2** berikut.

Teorema 2.3 : Permutasi dengan Beberapa Unsur yang Sama

Jika $n \in Z^+$ dengan *n* menyatakan banyaknya anggota *S* yang memuat *k* unsur yang masing-masing muncul $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ *kali*, ($n = n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k$), maka banyaknya permutasi *n* beberapa unsur yang sama tersebut adalah

$$P(n;n_1, n_2, n_3, .., n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\ldots n_k!}$$

Bukti Teorema 2.2.

Misal S himpunan yang mempunyai *n* anggota yang tidak semuanya berbeda (ada beberapa anggota *n* yang sama sebanyak *k* unsur). Dari *n* anggota S tersebut terdapat

n_1 buah objek sama jenis - 1
n_2 buah objek sama jenis – 2
n_3 buah objek sama jenis – 1
$\vdots$ $\vdots$
n_k buah objek sama jenis – k

dengan $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_k = n$

Jika kita asumsikan *n* anggota S semuanya berbeda maka banyak permutasi S yang mempunyai *n* objek tersebut adalah P(*n*,*n*) = *n*!.

Tetapi, karena ada beberapa anggota *n* yang sama sebanyak *k* unsur maka banyak permutasi dari n objek tersebut

ada n_1! cara objek sama jenis – 1 (jika masing-masing dibedakan)

ada n_2! cara objek sama jenis–2 (jika masing-masing dibedakan) *ada* n_3! cara objek sama jenis – 3 (jika masing-masing dibedakan)

$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$

ada n_k! cara objek sama jenis – k (jika masing-masing dibedakan)

sehingga, banyak permutasi *S* yang mempunyai *n* anggota dimana terdapat *k* unsur yang sama masing-masing muncul $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ *kali* adalah

$$P(n;n_1, n_2, n_3,..,n_k) = \frac{P(n,n)}{n_1!n_2!n_3!...n_k!} = \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!...n_k!}$$

Dengan demikian teorema terbukti.

Contoh 2.6

(a) Tentukan banyaknya susunan 7 huruf yang diambil dari kata "SARJANA"?

(b) Ada berapa barisan bilangan ternair 9-angka memuat dua angka "0", tiga angka "1", dan 4 angka "2"?

Penyelesaian

(a) Beberapa contoh kemungkinan menyusun huruf dalam kata "SARJANA" adalah : SAARJAN, SARANAJ, ASARAJN, dan lain-lain. Kata "SARJANA" terdiri dari 7 huruf , yang tersusun dari :

1 buah huruf S
3 buah huruf A
1 buah huruf R
1 buah huruf J
1 buah huruf N

Sehingga, banyaknya kemungkinan untuk membuat permutasi adalah

$$P(7;\ 1,\ 3,\ 1,\ 1,\ 1) = \frac{7!}{1!.3!.1!.1!} = 840 \text{ bentuk}$$

Jadi, banyaknya susunan 7 huruf yang diambil dari kata "SARJANA" adalah 840.

(b) Bilangan ternair adalah bilangan yang dibentuk dari angka "0", "1", dan "2". Beberapa bilangan 9-angka yang dimaksud adalah: 001112222, 10101222, 102120122, dll. Banyak bilangan yang dibentuk adalah

$$P(9;\ 2,\ 3,\ 4) = \frac{9!}{2!.3!.4!} = 1260 \text{ bentuk}$$

Contoh 2.7

Pada acara seminar Matematika akan dibentuk enam seksi kepanitian dari 20 orang. Enam seksi kepanitiaan yang dimaksud adalah seksi Acara, Konsumsi, Hubungan Masyarakat (Humas), Publikasi, dan seksi Pendanaan. Jika seksi Acara dan pendanaan masing-masing hanya terdiri 2 orang dan empat seksi lainnya masing-masing terdiri dari 4 orang, maka berapa banyaknya seksi kepanitian yang dapat dibentuk paa acara Seminar Matematika?

Penyelesaian

Perhatikan bahwa persoalan di atas dapat kita analogkan dengan cara menyusun 20 huruf yang dibentuk dari enam huruf berbeda dimana ada beberapa huruf yang muncul secara berulang. Dengan demikian, persoalan ini merupakan persoalan permutasi berulang dari 20 objek. Sehingga banyak cara penyusunannya adalah

$$P(20;\ 2,\ 2,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4) = \frac{20!}{2!.2!.4!.\ 4!.\ 4!.\ 4!} = 1.832.414.100.000$$

Jadi, banyaknya seksi kepanitian yang dapat dibentuk pada acara Seminar Matematika adalah 1.832.414.100.000

2.3 Permutasi Siklik

Permutasi yang dibicarakan sebelumnya sering disebut *permutasi liniear* karena objek-objeknya dijajar dalam satu baris (garis). Apabila jajaran objek-objek tersebut dilakukan secara melingkar seperti halnya tempat duduk, maka permutasi yang mungkin akan berkurang. Permutasi ini dinamakan ***permutasi siklik*** yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.4: Permutasi Siklik dari *n* objek adalah susunan objek-objek yang mengelilingi sebuah lingkaran (atau kurva tertutup sederhana)

Contoh 2.8

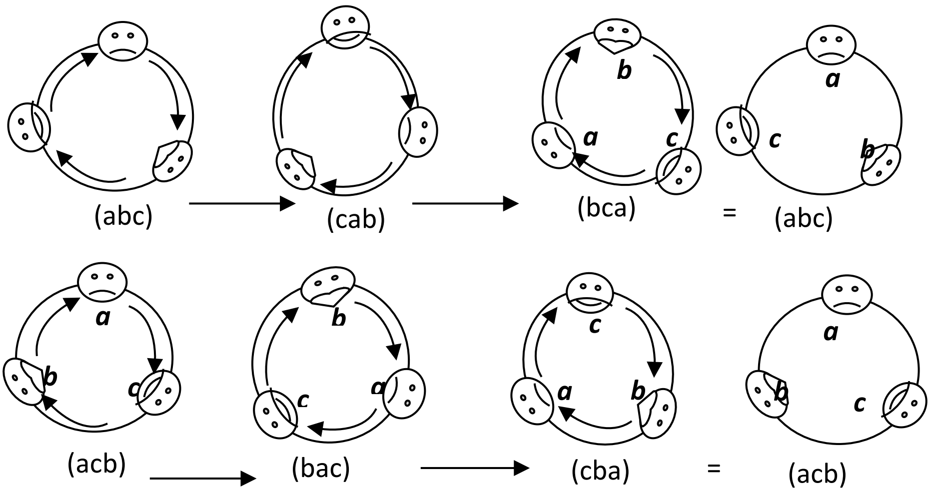
Misalkan kita mempunyai tiga orang *a*, *b*, *c*. Jika mereka duduk dalam satu baris, maka susunan duduk menjadi

abc, *acb*, *bca*, *bac*, *cab*,*cba*

sehingga, banyaknya susunan berbeda 3 orang duduk dalam satu baris ada 6 yang ditulis sebagai P(3,3)= 6.

Tetapi sekarang mereka duduk mengelilingi meja bundar. Berapa banyak semua kemungkinan susunan posisi duduk mereka jika arah pergeserannya diperhatikan?.

Posisi 3 orang duduk *a*, *b*, *c* mengelilingi meja bundar diilustrasikan pada gambar berikut.



Gambar 2.1 Ilustrasi Penentuan PermutaSI Siklis (3,3)

Perhatikan bahwa dalam melingkar posisi *abc*, *cab*, *bca* (menggeser simbol secara bersama searah putaran jarum jam) hanya memberikan satu posisi atau ditulis dengan sebuah permutasi siklik (*abc*). Demikian pula posisi *acb*, *bca*, *cba* juga memberikan satu posisi ditulis sebagai sebuah permutasi siklik (*acb*). Kita tidak menjumpai lagi posisi lain, selain dua posisi tersebut. Sehingga posisi tiga orang melingkar hanya ada dua, yaitu posisi *abc* dan *acb*. Dengan kata lain terdapat dua buah permutasi-3 siklik dari tiga obyek berbeda *a*, *b*, *c*, yaitu: (*abc*), dan (*acb*).

Perhatikan bahwa dari setiap permutasi-3 siklik di atas terdapat hanya 3 buah permutasi liniear. Sehingga seluruhnya terdapat 3 × 2 = 6 permutasi liniear. Secara umum, jika arah putaran diperhatikan dan pengulangan elemen tidak diperbolehkan, hubungan antara banyaknya permutasi liniear dengan permutasi siklik dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 2.4: Permutasi Siklis dengan memperhatikan arah putaran

Jika PS(*n*,*r*) menyatakan banyaknya permutasi -r siklik dari *n* obyek berbeda dengan memperhatikan arah putarannya, maka

$$PS(n,r)= \frac{n!}{r(n-r)!}$$

Khususnya **PS(n,n) = (n-1)!**,yang menyatakan banyaknya permutasi-*n* siklik dari *n* obyek berbeda dengan memperhatikan arah putarannya.

Catatan

Sebuah permutasi siklik akan sama (ekuivalen) dengan permutasi siklik lainnya jika yang satu dapat diperoleh dari yang lain lewat putaran sedemikian hingga posisi objek pertama menempati posisisinya semula.

Bukti Teorema 2.4

Misal S himpunan yang mempunyai *n* elemen berbeda.Pikirkan sebuah permutasi-r siklik dari Stampa pengulangan.Dari setiap permutasi-*r* siklik terdapat *r* buah permutasi -*r* liniear S. Jika banyaknya permutasi-*r* siklik dari *S* adalah PS(*n*,*r*) dan banyaknya permutasi-*r*liniear dari Stampa pengulangan adalah P(*n*,*r*), maka berdasarkan aturan perkaliandiperoleh

$$P(n,r) = PS(n,r) \times r$$

$$\Leftrightarrow PS(n,r) = \frac{P(n,r)}{r}$$

$$\Leftrightarrow PS(n,r) = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r} \qquad (\textit{Teorema } 2.1)$$

$$\Leftrightarrow PS(n,r) = \frac{n!}{r(n-r)!}$$

Jika $n = r$ diperoleh

$$PS(n,n) = \frac{n!}{n(n-n)!}$$

$$= \frac{n!}{n.0!}$$

$$= \frac{n(n-1)!}{n} \qquad (\textit{definisi } 2.2)$$

$$= (n-1)\,!$$

Dengan demikian teorema terbukti.

Contoh 2.9 :

Pada saat acara pelatihan pengembangan kemampuan dosen Nasional, sekelompok dosen Matematika yang terdiri dari delapan dosen berkualifikasi akademik berbeda–beda duduk mengelilingi meja bundar untuk membahas satu tema pelatihan. Dua dari delapan orang dosen berkualifikasi akademik S-1. Enam dosen sisanya masin-masing berkualifikasi akademik S2 sebanyak 3 orang dan S3 sebanyak tiga orang. Tentukan banyak cara yang dapat dilakukan oleh dosen-dosen tersebut untuk duduk mengelilingi meja bundar, jika:

a. tanpa syarat;
b. dosen berkualifikasi akademik S1 harus duduk berdampingan;.

Penyelesaian

Jawaban a)

Perhatikan bahwa posisi duduk dosen-dosen mengelilingi meja bundar menunjukkan penerapan permutasi siklis. Ada 8 orang yang akan diatur posisi duduknya secara melingkar, sehingga banyak cara dosen-dosen tersebut duduk adalah P(8-1)! = 7! = 5040

Jawaban b)

Dua dosen berkualifikasi akademik S-1 yang duduk berdampingan kita anggap sebagai satu objek. Sedangkan enam dosen lainnya tidak berdampingan, sehingga objek yang kita atur dalam posisi melingkar ada 7. Karena mereka duduk dalam posisi melingkar maka berdasar teorema 2.4, banyak cara dosen-dosen tersebut duduk adalah P(7-1)= 6! = 720.

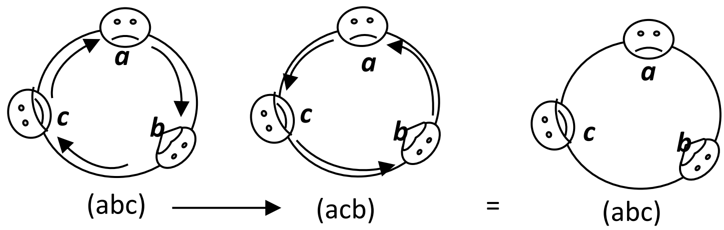
Perhatikan bahwa dua dosen yang berkualifikasi S-1 dapat kita atur dalam P(2,2) = 2! = 2.

Dengan demikian, jumlah cara dosen-dosen duduk mengelilingi meja bundar sedemikian hingga dosen berkualifikasi akademik S1 harus duduk berdampingan adalah $2 \times 720 = 1.440$

Permutasi Siklik Tampa Memperhatikan Arah Putarannya

Perhatikan kembali contoh 2.4 di atas. Jika 3 orang a,b, c mengelilingi meja bundar. Berapa banyak semua kemungkinan susunan posisi duduk mereka tampa memperhatikan arah pergeserannya?

Jika arah pergeserannya tidak diperhatikan, dengan kata lain bergeser searah ataupun berlawanan arah jarum jam tidak dibedakan, maka posisi *abc* = posisi *acb*, atau posisi *cab* = posisi *cba*, begitupun juga posisi *bca* = posisi *bac*sehingga hanya memberikan satu posisi yaitu *abc*, ditulis permutasi siklik (abc). Jadi, banyak susunan posisi duduk 3 orang a,b c mengelilingi meja bundar tampa memperhatikan arah pergeserannya adalah 1, dengan kata lain banyaknya permutasi-3 siklik tampa memperhatikan arah perputarannya adalah 1 dan ditulis sebagai PS*(3,3) = 1, seperti ditunjukkan pada diagram berikut.



Gambar 2. 2 Ilustrasi Permutasi Siklis Tampa Memperhatikan Arah Putarannya

Dari uraian di atas menunjukkan bahwa dari setiap permutasi-3 siklik tampa memperhatikan arah putarannya terdapat 2 buah permutasi-3 siklik dengan memperhatikan arah putarannya, dengan kata lain PS(3,3) = 2 × PS*(3,3) = 2 x 1 = 2. Mudah ditunjukkan terdapat hanya 3 buah permutasi-3 siklik tampa memperhatikan arah putarannya dari 4 objek *a*, *b*, *c*, *d*, yaitu : (abcd), (abdc), dan (acbd), sehingga banyaknya permutasi-4 siklik dengan memperhatikan arah putarannya dari 4 obyek PS(4,4)= 2 × PS*(4,4) = 2 × 3 = 6 buah, yaitu : (abcd), (abdc), (acbd), (adbc), (acdb), (adcb).

Secara umum, jika arah putaran tidak diperhatikan, hubungan antara banyaknya permutasi siklik dengan memperhatikan arah putaran dengan banyaknya permutasi siklik tampa memperhatikan arah putarannya dinyatakan dalam teorema 2.5 berikut.

Teorema 2.5: Permutasi Siklis dengan Memperhatikan Putaran

Jika PS*(*n*,*r*) menyatakan banyaknya permutasi – *r* siklik dari *n* obyek berbeda tampa memperhatikan arah putarannya, maka

$$\text{PS}^*(n,r) = \frac{n!}{2r(n-r)!}.$$

Khususnya **PS(n,n) =** $\frac{1}{2}(n-1)!$, yang menyatakan banyaknya permutasi-*n* siklik dari *n* obyek berbeda tampa memperhatikan arah putarannya.

Bukti Teorema 2.5

Misal S himpunan yang mempunyai *n* elemen berbeda.Pikirkan sebuah permutasi-r siklik dari Stampa pengulangan.Dari setiap permutasi-*r* siklik tampa memperhatikan arah putaran terdapat 2 buah permutasi-r siklik dengan memperhatikan arah putaran. Jika banyaknya permutasi-*r* siklik dari Stampa memperhatikan arah putaran dinyatakan sebagai PS*(*n*,*r*) dan banyaknya permutasi-*r*siklik dari S dengan memperhatikan arah putarannya dinyatakan sebagai PS(*n*,*r*), maka berdasarkan aturan perkaliandiperoleh

PS(n,r) = PS*(n,r) × 2

$$\Leftrightarrow PS*(n,r) = \frac{PS(n,r)}{2}$$

$$\Leftrightarrow PS*(n,r) = \frac{\frac{n!}{r(n-r)!}}{2} \qquad (\,Teorema\ 2.4\,)$$

$$\Leftrightarrow PS*(n,r) = \frac{n!}{2r(n-r)!}$$

khusus$n$ = r diperoleh

$$PS*(n,n) = \frac{n!}{2n(n-n)!}$$

$$= \frac{n!}{2n.0!}$$

$$= \frac{n(n-1)!}{2n} \qquad (definisi\ \ 2.2\,)$$

$$= \frac{1}{2}(n-1)\,!$$

Dengan demikian teorema terbukti

ContoH 2.10

Sebanyak 200 berlian dilabeli dengan angka-angka 1, 2, 3, ...,20. Berlian-berlian tersebut akan dibuat sebuah kalung yang terdiri dari 10 berlian yang berbeda. Dalam hal ini, n = 20, r = 10, Maka banyak kalung yang mungkin terbentuk adalah

$$PS*(20,15) = \frac{20!}{2(10)(20-10)!} = \frac{20!}{20.10!} = 33.522.128.640$$

2.2 Kombinasi

Definisi 2.5

Kombinasi adalah jajaran dari himpunan elemen-elemen yang urutannya tidak diperhatikan

Perhatikaan kasus berikut

Misal S = {a,b,c,d)

Berapa banyak kombinasi 3 elemen dari 4 elemen S di atas ?

Solusi

Perhatikan tabel berikut.

Tabel 2. 2 Kombinasi 3 dari 4 elemen S Tampa Pengulangan

Baris Ke-	Himpunan bagian *S* dengan 3 elemen (kombinasi)	Permutasi Setiap himpunan bagian
1	{a, b, c}	abc, acb, bca, bac, cab, cba

2	{a, b, d}	abd, adb, bda, bad,dab, dba
3	{a, c, d}	acd, adc, cda, cad,dac, dca
4	{b, c, d}	Bcd, bdc, cdb, cbd,dbc, dcb

Jika kita tidak memperhatikan urutan setiap susunan pada baris ke-1, 2, 3, dan 4, pada kolom ke 3 tabel di atas, dengan kata lain menganggap sama dua jajaran atau lebih yang dibentuk dari elemen-elemen yang sama maka diperoleh sebuah kombinasi dari setiap permutasi 3 elemen S seperti yang ditunjukkan pada tabel 2.2 berikut.

Tabel 2. 3 Hubungan kombinasi dengan permutasi

Baris ke-	Himpunan bagian *S* dengan 3 elemen (kombinasi	Sebuah Kombinasi = permutasi setiap himpunan bagian
1	{a, b, c}	abc = acb =bca = bac = cab= cba
2	{a, b, d}	abd = adb =bda = bad= dab = dba
3	{a, c, d}	acd = adc = cda = cad = dac= dca
4	{b, c, d}	bcd = bdc =cdb = cbd = dbc= dcb

Perhatikan bahwa setiap kombinasi 3 dari 4 elemen S di atas terdapat P(3,3) = 3! = 6 buah permutasi 3 elemen S. Sehingga banyaknya kombinasi 3 dari 4 elemen S adalah

P (4,3) = 4 x P(3,3) permutasi 3 dari *S*

$\Leftrightarrow P(4,3) = 4 \times 3!$

$\Leftrightarrow \frac{P(4,3)}{3!} = 4$

$\Leftrightarrow \frac{24}{6} = 4$

Jadi, banyaknya kombinasi 3 dari 4 elemen disimbolkan dengan" "C(4,3)= 4" yaitu himpunan {a,b,c}, {a,b,d}, {a,c,d}, {b,c,d}

Catatan

C(n,r)=Banyaknya kombinasi *r* dari himpunan S yang mempunyai *n* anggota berbeda tampa pengulangan

Dari Kasus di atas, secara umum untuk menentukan banyaknya kombinasi *r* dari himpunan S yang mempunyai *n* anggota berbeda tampa pengulangan dapat disajikan dalam teorema 1.2 berikut.

Teorema 2.6: Kombinasi Tampa Pengulangan

Jika *n* dan *r* bilangan bulat non negatif dengan *n≥r, maka*

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

Bukti

Misal S himpunan yang mempunyai n elemen berbeda.
Pikirkan sebuah kombinasi *r* dari *S* tampa pengulangan.

Dari setiap himpunan *r* elemen S diperoleh sebanyak P(*r*,*r*) atau r! Permutasi *r* dari *S*. Padahal banyaknya kombinasi *r* dari *S* adalah C(*n*,*r*) dan banyaknya permutasi *r* dari *S* adalah P(*n*,*r*). Berdasarkan aturan perkalian,diperoleh

P(n,r) = P(r,r).C(n,r)

$$\Rightarrow C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)}$$

$$= \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} \qquad (Teorema\ 2.1)$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Dengan demikian, toerema terbukti.

Contoh 2.11

Sebanyak 16 orang mahasiswa yang terdiri dari 8 mahasiswa (laki-Laki) dan 7 mahasiswi disebuah kampus akan diseleksi untuk mengikuti program Pertukaran Mahasiswa Nusantara (Permata). dari 15 mahasiswa tersebut yang akan pilih hanya 5 orang. Tentukan banyak cara memilih mahasiswa untuk mengikuti program Permata tersebut, jika:

a. tanpa syarat;
b. paling banyak 4 mahasiswi yang dipilih;
c. mahasiswa (laki-laki) selalu ada dalam pilihan tersebut

Penyelesaian

Jawaban a)

Pemilihan mahasiswa untuk mengikuti program Permata tersebut tidak memperhatikan urutan karena tidak disebutkan posisinya dan bersifat umum. Dengan kata lain bila siswa A dan B terpilih, maka sama saja terpilihnya mahasiswa B dan A (tidak mempermasalahkan urutan pemilihan). Sehingga banyak cara memilih mahasiswa mengikuti aturan kombinasi. Dalam hal ini, n = 16, dan r = 5. Berdasarkan teorema 2.6 diperoleh.

$$C(16,5) = \frac{16!}{5!(16-5)!} = \frac{16!}{5!.11!} = \frac{16.\ 15..14.13.12.11!}{5!.11!} = 273$$

Jadi, secara keseluruhan banyak cara memilih 5 mahasiwa dari 16 mahasiwa untuk mengikuti program Permata adalah 273.

Jawaban b)
Paling banyak 4 mahasiswi yang dipilih dari 5 kuota yang tersedia akan memberikan lima kemungkinan/tugas yang saling lepas, yaitu :
Kemungkinan 1: tidak ada satupun mahasiswi dipilih
Ketika tidak ada satupun mahasiswi yang dipilih maka kita bisa memilih 5 mahasiswa. Misal M disimbolkan sebagai mahasiswa dan Mahasiswi disimbolkan sebagai Mi, E_1 menyatakan Kejadian memilih nol mahasiswi dari 7 mahasiswi yang ada dan memilih 5 mahasiswa dari 8 mahasiswa yang ada. Pernyataan ini ini dapat dinyatakan sebagai : E_1 = 0Mi $\wedge$ $5\,M$, sehingga berdasarkan teorema 2.6 banyak cara memilih E_1 adalah
$|E_1|$ = $C(7,0)\ \times\ C(8,5)$ =$\frac{7!}{0!(7-0)!}.\frac{8!}{5!(8-5)!}$ = $\frac{7!}{7!}\times\frac{8!}{5!.3!}$ = $\frac{7!}{7!}\times\frac{8..7.6.5!}{5!.3.2.1}$ = 56

Kemungkinan 2 : ada satu mahasiswi dipilih
Ketika 1 mahasiswi yang dipilih, 4 lainnya merupakan mahasiswa. Misal M disimbolkan sebagai mahasiswa dan Mahasiswi disimbolkan sebagai Mi, E_2 menyatakan Kejadian memilih 1 mahasiswi dari 7 mahasiswi yang ada dan memilih 4 mahasiswa dari 8 mahasiswa yang ada. Pernyataan ini ini dapat dinyatakan sebagai : E_2 = 1Mi $\wedge$ $4M$, sehingga berdasarkan teorema 2.6 banyak cara memilih E_2 adalah
$|E_2|$ = $C(7,1)\ \times\ C(8,4)$ =7 $\times$ 70 = 490

Kemungkinan 3 ; ada dua mahasiswi dipilih
Ketika 2 mahasiswi yang dipilih, 3 lainnya merupakan mahasiswa. Misal M disimbolkan sebagai mahasiswa dan Mahasiswi disimbolkan sebagai Mi, E_2 menyatakan Kejadian memilih 2 mahasiswi dari 7 mahasiswi yang ada dan memilih 3 mahasiswa dari 8 mahasiswa yang ada. Pernyataan ini ini dapat dinyatakan sebagai : E_3 = 2Mi $\wedge$ $3M$, sehingga berdasarkan teorema 6.2 banyak cara memilih E_3 adalah
$|E_3|$ = $C(7,2)\ \times\ C(8,3)$ =21 $\times$ 56 = 1.176

Kemungkinan 4 : ada tiga mahasiswi dipilih
Ketika 3 mahasiswi yang dipilih, 2 lainnya merupakan mahasiswa. Misal M disimbolkan sebagai mahasiswa dan Mahasiswi disimbolkan sebagai Mi, E_4 menyatakan Kejadian memilih 3 mahasiswi dari 7 mahasiswi yang ada dan memilih 2 mahasiswa dari 8 mahasiswa yang ada. Pernyataan ini ini dapat dinyatakan sebagai : E_4 = 3Mi $\wedge$ $2M$, sehingga banyak cara memilih E_4 adalah
$|E_4|$ = $C(7,3)\ \times\ C(8,2)$ =35 $\times$ 28 = 980

Kemungkinan 5 : ada empat mahasiswi dipilih
Ketika 4 mahasiswi yang dipilih, 1 lainnya merupakan mahasiswa. Misal M disimbolkan sebagai mahasiswa dan Mahasiswi disimbolkan sebagai Mi, E_5 menyatakan Kejadian memilih 4 mahasiswi dari 7 mahasiswi yang ada dan memilih 1 mahasiswa dari 8 mahasiswa yang ada. Pernyataan ini ini dapat

dinyatakan sebagai : E_5 = 4Mi $\wedge$ $3M$, sehingga banyak cara memilih E_5 adalah

$|E_5|$ = $C(7,4)$ $\times$ $C(8,1)$ =35 $\times$ 8 = 280

Secara keseluruhan ada 56 + 490 + 1.176 + 980 + 280 = 2.982 cara memilih mahasiswa untuk mengikuti program permata

Jawaban c)

Ketika mahasiswa (laki-laki) selalu ada dalam pemilihan tersebut maka paling sedikit 1 mahasiwa (laik-laki) terpilih dari 5 kuota yang tersedia. Hal ini akan memberikan lima kemungkinan/tugas yang saling lepas, yaitu : ada satu mahasiswa yang dipilih, ada dua mahasiswa yang dipilih, ada 3 mahasiswa yang dipilih, ada 4 mahasiswa yang dipilih, atau ada 5 mahasiswa yang dipilih (tidak ada mahasiswi yang dipilih). Misal M disimbolkan sebagai mahasiswa dan Mahasiswi disimbolkan sebagai Mi, E menyatakan banyak cara memilih mahasiswa untuk mengikuti program Permata sedemikian hingga mahasiswa selalu ada dalam pilihan tersebut, dan E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 masing-masing menyatakan kejadian di atas. Dengan cara yang sama seperti pada jawaban point **b)** maka kemungkinan cara memilih dinyatakan dengan sebagai

E =$E_1 \vee E_2 \vee E_3 \vee E_4 \vee E_5$ atau (1M $\wedge$ $4Mi$) $\vee$ (2M $\wedge$ $3Mi$) $\vee$ (3M $\wedge$ $2Mi$) $\vee$ (4M $\wedge$ $1Mi$) $\vee$ (5M $\wedge$ $0Mi$)

Sehingga banyak cara memilih dengan syarat yang dimaksud adalah

$|E|$ = $C(8,1) \times C(7,4)$+ $C(8,2) \times C(7,3)$ + $C(8,3) \times C(7,2)$+ $C(8,4) \times C(7,1)$+ $C(8,5) \times C(7,0)$

= 8 $\times$ 35 + 28 $\times$ 35 + 56 $\times$ 21 + 70 $\times$ 7 + 56 $\times$ 1

= 280 + 980 + 1.176 + 490 + 56

= 2982

Contoh 2.12

Sebuah keranjang berisi 5 apel merah dan 10 apel hijau.Sebanyak 6 apel diambil secara acak dalam keranjang. Berapa peluang terambil paling sedikit 4 apel merah?

Altrernatif Penyelesaian

Dalam mengambil buah-buahan secara acak dalam keranjang kita tidak perlu memperhatikan urutannya. Karena ketika kita mengambil satu apel merah dan 3 apel hijau sama saja ketika kita mengambil tiga apel hijau dan satu apel merah. Sehingga persoalan ini dapat diselesaikan dengan aturan kombinasi.

Kita ketahui bahwa banyak buah seluruhnya = 5+10 =15

Eksperimen : Mengambil 6 apel secara acak didalam keranjang yang berisi 5 Apel merah (AM) dan 10 Apel hijau (AH).

Anggota S adalah kemungkinan yang terjadi. Misal kemungkinan terambil 1 Apel merah 9 (AM) dan 5 Apel hijau (AH), dan lain-lain.

S = himpunan semua cara mengambil 6 apel dari keranjang yang berisi 5 Apel Merah dan 10 Apel Hijau.

Kejadian : Himpunan bagian dari ruang sampel

Eksp (E) = himpunan bagian dari S sedemikian hingga terambil paling sedikit 4 Apel Merah (AM)

Banyak cara mengambil 6 buah apel secara acak dari keranjang berisi 15 buah apel adalah

$|S|$ = C(15,6) = $\frac{15!}{6!(15-6)!}$= $\frac{15!}{6!.9!}$=5005

Kemungkinan yang terjadi:

terambilnya 4 Apel merah (AM) dan 2 Apel Hijau (AH) atau 5 Apel Merah (AM) dan 1 Apel Hijau (AH), kita simbolkan dengan

E = {(4 AM $\wedge$ 2 AH) $\vee$ (5AM $\wedge$ 1 AH)}, kita peroleh

$|E|$ = C(5,4). C(10,2) + C(5,5). C(10.1)

= $\frac{5!}{4!(5-4)!}.\frac{10!}{2!(10-2)!} + \frac{5!}{5!(5-5)!}.\frac{10!}{1!(10-1)!}$

= $5.45 + 1.10$

= $225 + 10$

= 235

Sehingga, P(E)=$\frac{|E|}{|S|}$ = $\frac{235}{5005}$ = 0,05

Jadi, peluang terambil paling sedikit 4 apel merah adalah 0,05

Kombinasi dengan pengulangan

Agar memahami kombinasi dengan pengulangan perhatikan kasus berikut.

Misal S = {a, b, c }

Kombinasi 2 dari 3 elemen pada himpunan S di atas dimana pengulangan diperbolehkan yaitu {a,a}, {a,b}, {a,c}, {b,b}, {b,c}, {c,c}.Banyaknya kombinasi 2 dari 3 elemen S ini adalah 6 disimbolkan dengan "C*(3,2)=6".

Perhatikan enam buah kombinasi 2 dari S di atas dapat direpresentasikan berbeda dengan cara berikut.

1) Setiap elemen yang muncul pada sebuah kombinasi di tulis dengan angka "0" sebanyak elemen yang muncul.
2) Setiap dua elemen berbeda dipisahkan dengan angka "1"
3) Banyaknya pemisah sebanyak n-1 angka "1"

Tabel berikut menunjukkan representasi yang dimaksud.

No	Kombinasi 2 dari S	Huruf	Susunan

	dengan pengulangan	a	b	C	lain
(1)	(a,a)	00	-	-	0011
(2)	(a,b)	0	0	-	0101
(3)	(a,c)	0	-	0	0110
(4)	(b,b)	-	00	-	1001
(5)	(b,c)	-	0	0	1010
(6)	(c,c)	-	-	00	1100

Berdasarkan tabel di atas menunjukkan bahwa kombinasi (1) yaitu (a,a) memuat 2 huruf *a*, maka pada kolom huruf *a* kita letakkan 2 angka "0" dan pembatas antara kolom huruf *b* dan *d* kita tulis sebanyak satu angka "1" sehingga kombinasi (*a,a*) berkoresponden dengan susunan "0011". Kombinasi (2) yaitu (*a,b*) memuat 1 huruf *a*, 1 huruf b, maka pada tabel, masing-masing kolom yang sesuai kita letakkan 1 angka "0" pada kolom huruf *a*, 1 angka "0" pada kolom huruf *b*, selanjutnya pembatas antara kolom huruf a dan b kita tulis sebanyak satu angka "1", pembatas antara kolom huruf b dan c kita tulis sebanyak satu angka "1" sehingga kombinasi (*a,b*) berkoresponden dengan susunan "0011". Dengan demikian, susunan lain dari masing-masing kombinasi (1),(2),(3),(4),(5),(6) adalah 0011, 0101, 0110, 1001, 1010, dan 1100.Susunan lain dari keenam kombinasi ini membentuk barisan binair 4-angka. Barisan binair didefinisikan sebagai jajaran susunan objek-objek yang terdiri dari angka "0" dan angka "1" . Dengan demikian, menentukan banyaknya kombinasi 2 dari 3 elemen S dengan pengulangan sama saja dengan menentukan banyaknya cara meletakkan angka "0" atau meletakkan angka "1" dari 4 posisi yang dibentuk dari angka "0" dan angka "1". Mengingat dalam meletakkan angka "0" atau "1" tidak perlu memperhatikan urutannya maka banyaknya binair 4-angka sama dengan banyaknya kombinasi 2 dari 4 objek sehingga "C*(3,2)= C(4,2)= 6".

Berikut uraian cara menentukan banyaknya kombinasi 2 dari 3elemen S dimana pengulangan diperbolehkan.

Kombinasi 2 dari S dengan pengulangan	Susunan Lain	Hasil		C*(n,r)
(a,a)	0011	C(4,2) =	C(3+2-1, 2) atau C(3+2-1, 3-1)	C*(3,2)
(a,b)	0101	C(4,2) =	C(3+2-1, 2) atau	C*(3,2)

			C(3+2-1, 3-1	
(a,c)	0110	C(4,2) =	C(3+2-1, 2) atau C(3+2-1, 3-1	C*(3,2)
(b,b)	1001	C(4,2) =	C(3+2-1, 2) atau C(3+2-1, 3-1	C*(3,2)
(b,c)	1010	C(4,2) =	C(3+2-1, 2) atau C(3+2-1, 3-1	C*(3,2)
(c,c)	1100	C(4,2) =	C(3+2-1, 2) atau C(3+2-1, 3-1	C*(3,2)
⋮	⋮	⋮	⋮	
...	...	*C(n+r-1*, r) atau C(n+r-1, n-1)		C*(3,2)

Secara umum jika himpunan S terdiri dari n elemen berbeda maka banyaknya kombinasi *r* dari himpunan S yang mempunyai *n* elemen berbeda dimana pengulangan diperbolehkan dapat dinyatakan dalam bentuk teorema berikut.

Teorema 2.7

Jika *n* dan *r* bilangan bulat non negatif dengan $n \geq r$, *maka*

$$C^*(n,r) = C(n+r-1, r), \text{ atau}$$
$$C^*(n,r) = C(n+r-1, n-1)$$

Catatan:

Simbol "C*(n,r)"= Banyaknya kombinasi *r* dari S yang mempunyai *n* objek berbeda dengan pengulangan diperbolehkan

Contoh. 2.13

Tamu undangan dalam sebuah acara hajatan disuguhkan 11 jenis jajanan lezat seperti pada gambar berikut.

Jika setiap tamu undangan mendapatkan 15 jajan yang disediakan. Maka ada berapa cara tamu undangan mendapatkan jajanan yang disediakan?

Alternatif Penyelesaian

Setiap tamu undangan tersebut mendapatkan 15 jajan dari 11 jenis jajan yang disediakan. Perhatikan dalam mendapatkan jajan, tamu undangan tidak memperhatikan urutan jajan yang diterima sehingga persoalan ini termasuk kasus kombinasi. Perhatikan bahwa setiap tamu undangan dapat memilih lebih dari satu jenis jajan yang sama. Misal, 11 jenis jajan yang disediakan tersebut kita labeli dengan huruf A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K. Berikut beberapa contoh jajan yang didapatkan oleh tamu undangan: AAAABBCCDFGGGHH, AAAABBBBBCCCCC, CCCCCCCCCCCCCCC dan lain-lain. Dalam hal ini kita mendapatkan n = 11, r =15. Berdasarkan teorema 2.7, banyak cara yang dimaksud adalah

C*(11, 15) = C(11+15-1, 15)

$$= \frac{26!}{15!(11-1)!}$$

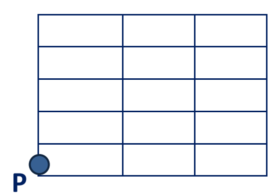
$$= \frac{26!}{15!\,.\,10!}$$

= 84.987.760

2.3 Persoalan Lintasan Cantik dan tak Cantik

Perhatikan kasus berikut

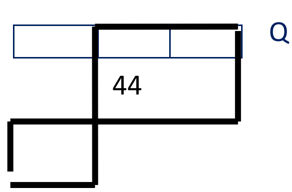
Diberikan Kisi-kisi berukuran 5 x 3 seperti pada gambar berikut

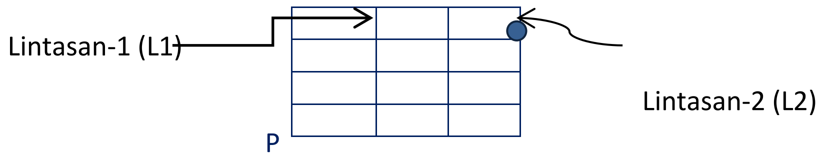


Sebuah partikel bergerak (melintas) dari pojok kiri bawah (P) ke pojok kanan atas (Q) pada kisi-kisi di atas. Jika arah melintas hanya boleh ke atas (A) dan ke kanan (K) saja serta melintasnya hanya melaui titik kisi-kisi maka tentukan Banyaknya lintasan dari P ke – Q ?,

Solusi

Arah lintasan partikel di atas dapat ditunjukkan pada gambar dibawah ini





Berdasarkan persyaratan di atas maka hasil lintasannya dapat direpresentasikan dengan barisan binair dua huruf yaitu A dan K seperti beberapa barisan berikut.
L1 : AAKKKAAA (dua langkah ke Atas, dilanjutkan tiga langkah ke Kanan dan dilanjutkan lagi tiga langkah ke Atas)
L2 : KAAAAAKK(satu langkah ke Kanan, dilanjutkan lima langkah ke Atas dan dilanjutkan lagi dua langkah ke Kanan)

Perhatikan dua Lintasan di atas. Pada setiap lintasan di atas menunjukkan bahwa terdapat 5 huruf A dan dan 3 huruf K, dengan jumlah huruf pada setiap lintasan sebanyak 8 huruf. Banyak lintasan dari P ke Q sama halnya dengan menentukan banyaknya barisan binair 8 huruf yang memuat 5 huruf A dan tiga huruf K. dengan kata lain menentukan banyaknya cara meletakkan huruf K dari 8 posisi huruf yang tersedia atau sama saja menentukan banyaknya cara meletakkan huruf A dari 8 posisi huruf yang tersedia. Hal ini menunjukkan bahwa persoalan ini merupakan persoalan kombinasi. Dengan demikian banyaknya lintasan dari P ke Q adalah C (8, 3)= C(5+3, 3) atau C (8, 5)= C(5+3, 5) = 56. Jadi, banyaknyalintasan dari P ke – Q dari persoalan yang dimaksud adalah 56

Perhatikan banyaknya A menunjukkan banyaknya baris yaitu 5 dan banyaknya huruf K menunjukkan banyaknya kolom yaitu 3 pada kisi-kisi berukuran 5 x 3. Hal ini berarti banyaknya lintasan pada kisi-kisi berukuran 5x3 = C (5+3, 3) = C (5+3, 5).

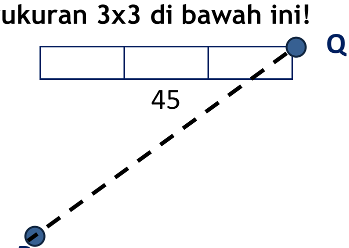
Dari persoalan ini, secara umum banyak lintasan dari pojok kiri bawah ke pojok kanan atas pada kisi-kisi berukuran (mxn) adalah C(mxn) = C(m+n, m) = $\frac{(m+n)!}{m!n!}$, dengan syarat melintas hanya boleh ke kanan dan ke atas saja.

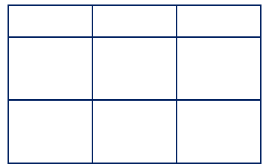
Dapatkah Anda menunjukkan (menulis) lintasan yang lain selain dari dua lintasan di atas?

Jika Kisi-kisinya berukuran persegi nxn, maka berapa banyak lintasannya?. Untuk lebih jelasnya perhatikan contoh berikut.

Contoh 2.14

Perhatikan kisi-kisi berukuran 3x3 di bawah ini!





Sebuah partikel bergerak (melintas) dari pojok kiri bawah (P) ke pojok kanan atas (Q) pada kisi-kisi di atas. Garis PQ di atas menunjukkan diagonal utama pada kisi-kisi tersebut. Partikel tersebut hanya boleh melintas ke atas (A) dan ke kanan (K) saja serta hanya melalui titik Kisi-kisi (grid). Jika *lintasan cantik* didefinisikan sebagai lintasan yang hanya menyentuh atau berada di bawah diagonal utama, sedangkan *lintasan tak cantik* adalah sebagai lintasan yang hanya melewati atau memotong diagonal utama (Budayasa, 2012). maka tentukan : (i) Banyaknya lintasan dari P ke – Q ?, (ii). Banyaknya lintasan Tak Cantik dari P ke – Q ?, (iii). Banyaknya lintasan Cantik dari P ke – Q ?

Altrernatif Penyelesaian

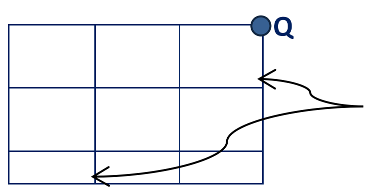
(ii) Sebelumnya telah kita ketahui bahwa banyak lintasan dari pojok kiri bawah ke pojok kanan atas pada kisi-kisi berukuran *m* x*n* adalah C(mxn) = C(m+n, m) = $\frac{(m+n)!}{m!n!}$, dengan syarat melintas hanya boleh ke kanan dan ke atas saja. Jika m = n maka C(n x n) = C(n+n, n) atau C(2n,n) = $\frac{(2n)!}{n!n!}$

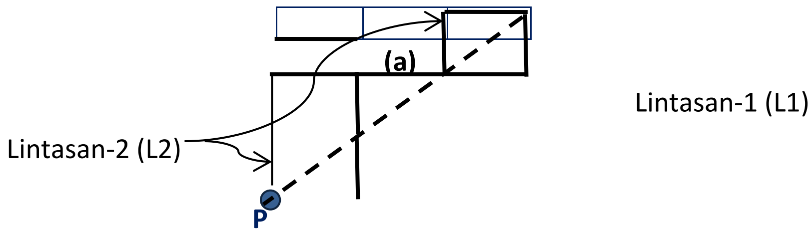
Jadi, banyak lintasan dari pojok kiri bawah ke pojok kanan atas pada kisi-kisi berukuran (n x n) adalah C(2n,n) = $\frac{(2n)!}{n!n!}$............................**(*)**

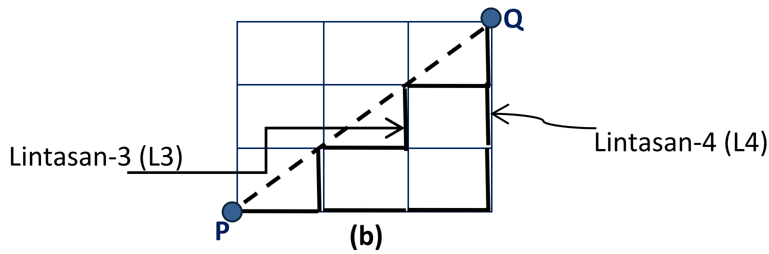
Dengan demikian, banyak lintasan dari P ke Q dengan kisi-kisi berukuran 3 x 3 adalah C(2.3, 3) = $\frac{(6)!}{3!3!}$ atau 20. Silakan dicek (ditulis) lintasannya!.

(iii) Lintasan L1 dan L2 pada gambar (2.3a) dibawah ini menunjukkan lintasan tak Cantik pada kisi-kisi (3 x 3). Sedangkan L3 dan L4 pada (gambar 2.3b) menunjukkan Lintasan Cantik dari kisi-kisi yang dimaksud. Masing-masing lintasan ini membentuk barisan binair *6-huruf* berikut.

L1 : KAAKKA, L2 : AAKKAK, L3 : KAKAKA, L4: KKKAAA

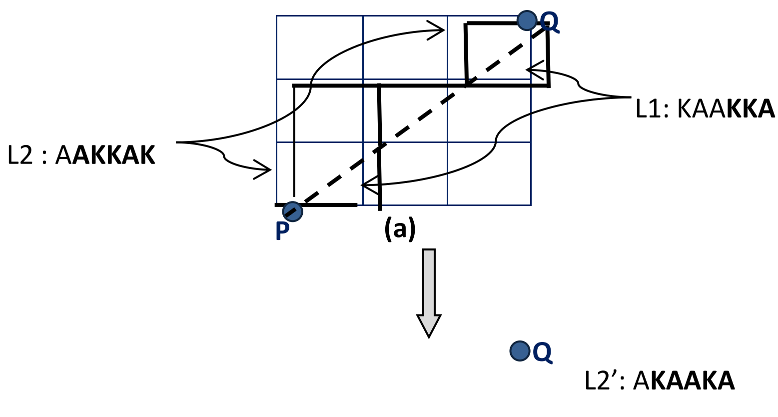


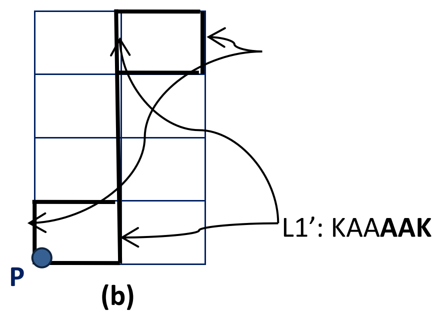




Gambar 2. 3 Lintasan Cantik dan Tak Cantik Pada Kisi - Kisi Berukuran (3x3)

Setiap lintasan tak cantik pada kisi-kisi 3x3 dapat diubah menjadi lintasan pada kisi-kisi berukuran persegi panjang *m* x *n* dengan cara *setelah satu langkah melewati diagonal utama maka urutan langkahnya dipertukarkan*, urutan melangkah ke Kanan (K) menjadi ke Atas (A) dan Ke Atas (A) menjadi ke Kanan (K), sehingga lintasan L1 dan L2 di atas menjadi Lintasan baru yaitu L1' dan L2' seperti ditunjukkan pada gambar di bawah ini.





Gambar 2. 4 Perubahan Lintasan Tak Cantik pada Kisi 3x3 Menjadi lintasan Persegi Panjang 4x2

Perhatikan bahwa setiap lintasan tak cantik L1 dan L2 pada kisi-kisi 3x3 ekuivalen dengan masing-masing lintasan L1’ dan L2’ menjadi kisi-kisi 4x2 atau kisi-kisi (3+1) x (3-1) yang direpresentasikan dengan barisan binar 6-huruf yaitu, L1 : KAA**KKA** ekuivalen dengan L1’ : KAA**AAK** dan L2: A**AKKAK** ekuivalen dengan **L2’ :** A**KAAKA .**

Catatan : Huruf yang dicetak tebal pada barisan binair- 6 huruf di atas merepresentasikan urutan langkah yang dipertukarkan.

Berdasarkan pola perubahan kisi-kisi 3x3 menjadi kisi-kisi 4 x 2 atau kisi-kisi (3+1) x (3-1), maka menentukan banyak lintasan tak cantik pada kisi-kisi 3 x 3 sama halnya dengan menentukan banyaknya lintasan pada pojok kiri bawah ke pojok kanan atas pada kisi-kisi 4 x 2 atau kisi-kisi (3+1) x (3-1),yaitu C(3+1+3-1, 3+1) = C (2.3, 3+1) atau C(3+1+3-1, 3-1) = C (2.3, 3-1).

Jadi, banyak lintasan tak cantik pada kisi-kisi 3x3 adalah adalah C(6,2) = C(6,4) = 15

Secara umum, setiap lintasan tak cantik pada kisi-kisi *n* x *n* ekuivalen dengan sebuah lintasan dari pojok kiri bawah ke pojok kanan atas pada kisi-kisi (n+1) x (n-1), sehingga banyak lintasan tak cantik pada kisi-kisi *n* x *n* = banyaknya lintasan dari pojok kiri bawah ke pojok kanan atas pada kisi-kisi (n+1) x (n-1), yaitu :

Jn = C(2n, n+1) = C(2n + n-1)..................................(**)

(iv) Berdasarkan formula pada persamaan (*) dan persamaan (**) kita dapat menentukann banyak lintasan Cantik pada kisi-kisi n x n yaitu Cn. Misal An menyatakan banyak lintasan pada kisi-kisi n x n, maka diperoleh

An =Cn + Jn

C(2n,n) = Cn + C(2n, n-1)

$\leftrightarrow Cn$ = C(2n,n) - C(2n, n-1)

$$\leftrightarrow Cn = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!n}{n!.\ n+1.\ n!}$$

$$= \frac{(2n)!}{n!n!}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \frac{(2n)!}{n!n!}\left(\frac{1}{n+1}\right), \text{ atau}$$

$$\leftrightarrow Cn = \left(\frac{1}{n+1}\right) C(2n,n)$$

Ingat !
$\frac{1}{(n-1)!} = \frac{n}{n!}$
$(n+1)! = (n+1).n!$

Jadi, banyak lintasan cantik pada kisi-kisi-kisi n x n adalah

$$Cn = \frac{1}{n+1} C(2n,n) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (***)$$

Bilangan Cn pada persamaan (***) selanjutnya disebut **bilangan Catalan**. Bilangan ini ditemukan oleh Eugene-Charles Catalan (1814-1894) yang merupakan seorang matematikawan Belgia.

Berdasarkan penggunaan bilangan Catalan ini dengan mudah kita dapat menentukan banyak lintasan cantik pada kisi-kisi n x n, sehingga untuk n =3 maka $C3 = \frac{1}{4} C(6,3) = = \frac{1}{4}.20$ = 5. Bisa juga dengan cara : C3= A3-J3 =20-15 = 5. Jadi, banyak lintasan Cantik dari P ke Q pada kisi-kisi 3x3 adalah 5, diantaranya: KAKAKA, KKKAAA, KKAAKAK, KKAKAA, KAKKAA.

2.4 Identitas Berkaitan dengan Permutasi dan Kombinasi

Identintas-identitas yang berhubungan dengan permutasi dan kombinasi:

(1) Sifat Simetri : $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

Bukti

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \binom{n}{r}$$

(2) Identitas newton: $\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$ untuk bilangan bulat $n \geq r \geq k \geq 0$

Bukti

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(r-k)!((n-k)-(r-k))!}$$

$$= \frac{n!}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(r-k)!(n-r)!}$$

$$= \binom{n}{r}\binom{r}{k} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad \frac{r!}{k!(r-k)!}$$

terbukti

Beberapa kasus khusus dari identitas newton adalah sebagai berikut:

(a) untuk k = 1, identitas newton menjadi

$$\binom{n}{k} r = n\binom{n-1}{r-1} \quad atau \quad \binom{n-1}{r-1} = \frac{n}{r}\binom{n}{r} \quad jika\ r \neq 0$$

(b) untuk r =r+1 dan k =1, didapat

$$\binom{n}{r+1}(r+1) = n\binom{n-1}{r} = n\frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!} = \frac{n!}{r!(n-1-r)!}$$

$$= \binom{n}{r}(n-r) \qquad = \frac{n!}{r!(n-1)!}(n-r)$$

didapat : $$\binom{n}{r+1} = \frac{n-r}{r+1}\binom{n}{r}$$

(3) P(n,r) = nP(n-1,r-1)

Bukti

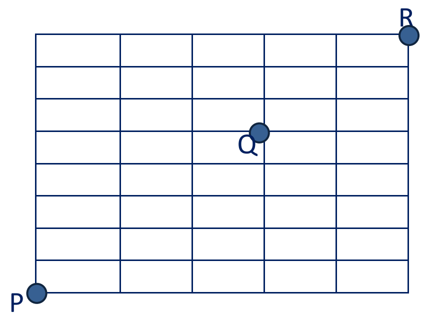
$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-r)!} = n\frac{(n-1)!}{((n-1)-(r-1))!} = nP(n-1, r-1)$$

D. Latihan 2

1. Hitunglah hasil dari
   a. $\frac{200!}{198! \times 10^{3!}}$
   b. $\frac{15! - 14!}{13!}$
   c. $\frac{2000! + 1999!}{2000! - 1999!} \times \frac{1998 + 1997!}{1998! - 1997!} \times \frac{1996 + 1995!}{1996! - 1995!} \times \ldots \times \frac{2! + 1!}{2! - 1!}$
   d. $\frac{2 + 3^2}{1! + 2! + 3! + 4!} \times \frac{3 + 4^2}{2! + 3! + 4! + 5!} \times \ldots \times \frac{2000 + 2001^2}{1999! + 2000! + 2001! + 2002!}$
2. Tentukan banyak susunan yang dibentuk dari kata atau bilangan berikut
   a. KREATIF; b. TANGGUNGJAWAB; c. 11224335
3. Sebuah keranjang berisi 4 buah bola merah, 5 buah bola biru, dan 6 buah bola putih. Akan diambil sebanyak 5 buah bola saja. Berapa banyak cara mengambil bola-bola berbeda warna dalam keranjang tersebut (ketiga warna bola terambil sekaligus)?
4. Suatu surel (email) terdiri 3 angka berbeda dan 3 huruf kecil berbeda serta mengandung karakter "@", "_" berbeda dalam susunan bebas. Ada berapa banyak surel yang dapat dibuat?
5. Ada berapa barisan bilangan genap *n* angka yang dibentuk dari semua angka – angka 1,2,3,4 sedemikian hingga angka bilangan sebelah kiri lebih kecil dari angka sebelah kanannya?
6. Sepuluh orang mahasiswa yang terdiri dari 3 mahasiswa di kampus X, 4 mahasiswa di kampus Y, dan 3 mahasiswa dikampus Z duduk pada sebuah meja bundar untuk mendiskusikan sebuah tema kegiatan. Banyak cara mengatur susunan duduk mereka jika setiap dua mahasiswa yang berasal dari kampus yang sama selalu duduk berdampingan?
7. Sebanyak 15 butir permen dibagikan kepada 5 orang anak, tiap anak boleh mendapatkan lebih dari 1 permen atau tidak sama sekali. Berapa jumlah cara pembagian yang dilakukan?. Untuk mendapatkan cara pembagian yang dimaksud, lakukan hal-hal berikut:
   a. Tuliskan 10 kemungkinan cara pembagian tersebut.
   b. Tuliskan representasinya dari kelima kemungkinan yang ditulis pada poin *a* dengan cara : (i) Setiap elemen yang muncul pada sebuah susunan di tulis dengan angka "0" sebanyak elemen yang muncul; (ii) Setiap dua elemen berbeda dipisahkan dengan angka "1"; dan (iii) Banyaknya pemisah sebanyak *n* - 1 angka "1" !

c. Tuliskan banyaknya semua kemungkinan berdasarkan data pada poin *b!* .

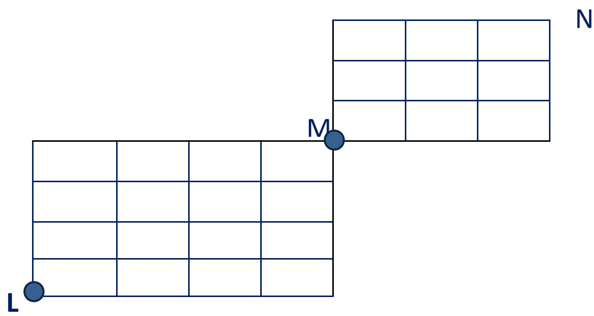
8. Perhatikan kisi-kisi berikut!



Sebuah partikel bergerak (melintas) dari pojok kiri bawah (P) ke pojok kanan atas (Q) pada kisi-kisi di atas. Jika arah melintas hanya boleh ke atas (A) dan ke kanan (K) saja, maka tentukan :

a. Banyaknya lintasan cantik dari P Ke Q melalui R ?, sertakan juga lintasannya maksimal 10 lintasan!
b. Banyaknya lintasan tak cantik dari P Ke Q yang tidak melalui R?, sertakan juga lintasannya maksimal 10 lintasan!

9. Perhatikan kisi-kisi berikut!



Sebuah partikel bergerak (melintas) dari pojok kiri bawah (L) ke pojok kanan atas (N) pada kisi-kisi di atas. Jika arah melintas hanya boleh ke atas (A) dan ke kanan (K) saja, maka tentukan banyaknya lintasan tak cantik dari L Ke N yang melalui M?, sertakan juga lintasannya mainimal 10 lintasan!

10. Perusahaan PT **Xmath** membuat kupon berhadiah berupa bilangan yang tediri dari angka-angka 1,1, 2, 2, 0, 3, 3

Jika kode kupon tersebut disusun dari urutan bilangan terkecil sampai bilangan yang terbesar, maka tentukan urutan kode kupon dengan No. 33001122?

A. Capaian Pembelajaran Mata kuliah (CPMK)

Mahasiswa mampu menjelaskan teorema binomial dan membuktikannya serta menerapkannya untuk mengespansikan suku aljabar berpangkat *n* secara logis, ktritis dan analitis melalui kinerja mandiri, tanggung jawab dan pantang menyerah

B. Kemampuan Akhir yang Diharapkan (Sub-CPMK)

1. Membuktikan sifat-sifat segitiga pascal
2. Menggunakan teorema binomial dan sifat-sifat segitiga pascal untuk menguraikan ekspresi aljabar bersuku dua $(x+y)^n$ dan menghitung nilai dari bilangan desimal berpangkat.

C. Materi

3.1 Teorema Binomial dan Segitiga Pascal

Pada materi ini kita awali dengan segitiga pascal. Segitiga pascal merupakan salah satu cara untuk menghitung kombinasi suatu suku berdasarkan kombinasi suku-suku yang lebih rendah. Jika harga $\binom{n}{r}$ diketahui untuk semua r, maka harga $\binom{n+1}{r}$ dapat dihitung untuk semua r $(0 < r \leq n)$. Ingat simbol C(n,r) dapat juga ditulis dengan $\binom{n}{r}$. Secara formal identitas pascal dapat dinyatakan dalam persamaan pada teorema 3.1 berikut

Teorema 3.1 (Formula Pascal)

Jika n dan k bilangan bulat dengan $(0 < r \leq n)$, maka

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n}{r}$$

Bukti

Kita akan membuktikan secara langsung ruas kiri dari formula pascal akan sama dengan ruas kanan formula tersebut setelah disederhanakan.

$$\binom{n+1}{r} = \frac{n!}{(r-1)!(n-(r-1))!} + \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$= \frac{\frac{(n+1)!}{n+1}.}{\left(\frac{r!}{r}\right)(n-r+1)!} + \frac{\frac{(n+1)!}{n+1}}{r!\frac{(n-r+1)!}{n-r+1}}$$

Ingat bentuk ekuivalen operator faktorial
$\frac{r!}{r}=(r-1)!$
$(n+1)!=(n+1).n!$

$$= \frac{r}{n+1}\frac{(n+1)!.}{r!(n-r+1)!} + \frac{n-r+1}{n+1}\frac{(n+1)!.}{r!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{r+(n-r+1)}{n+1}\binom{n+1}{r}$$

$$= \binom{n+1}{r}$$

Dalam aljabar penjumlahan dua buah suku seperti $x+y$ disebut binomial.Teorema binomial adalah rumus penjabaran $(x+y)^n$. n bilangan bulat non negatif. untuk n yang kecil, penjabaran $(x+y)^n$ dapat dilakukan dengan mudah dan sering kita jumpai.

untuk n = 0, $(x+y)^0 = 1$

n = 1, $(x+y)^1 = x+y$

$$= \binom{1}{0}x + \binom{1}{1}y$$

n = 2, $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$

$$= \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2$$

n = 3, $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

$$= \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3$$

$\vdots$ $\vdots$

$$= \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{r}x^{n-r}y^r + \ldots + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n$$

$$n = n, (x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{n-r} x^r y^{n-r} \quad \text{.....................(*))}$$

formula teorema binomial pada persamaan (*) dibuktikan secara deduktif dan hanya bersifat dugaan. Secara umum dapat dinyatakan dalam teorema 3.1 berikut.

Teorema 3.2 (Teorema Binomial)

Misalkan x dan y adalah peubah, dan *n* adalah bilangan bulat non negatif, maka

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r$$

Note:

Koefesien untuk $x^{n-r}y^r$, yaitu suku ke-(k+1)adalah C(n,r). Bilangan C(n,r) dari teorema 3.1 disebut koefesien binomial .

Bukti

Kita akan membuktikan teorema ini menggunakan induksi matematika. Dengan langkah-langkah pembuktian sebagai berikut.

(i) Untuk n = 0, jelas pernyataan ini benar. Selanjutnya untuk n = 1 maka

$$\begin{aligned}(x+y)^1 &= \sum_{r=0}^{1} \binom{1}{r} x^{1-r} y^1 \\ &= \binom{1}{0} x^{1-0} y^0 + \binom{1}{1} x^{1-1} y^1 \\ &= \frac{1!}{0!1!} x^1 y^0 + \frac{1!}{1!0!} x^0 y^1 \\ &= x + y\end{aligned}$$

Jadi, kita telah membuktikan bahwa benar untuk n = 1

(ii) Diasumsikan bahwa rumus benar untuk $n = k$

Jadi dianggap benar bahwa $(x+y)^k = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} x^{k-r} y^r$

akan ditunjukkan juga benar untuk n = k +1, yaitu bahwa

$$(x+y)^{k+1} = \sum_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} x^{k+1-r} y^r$$

(iii) Berdasarkan asumsi pada langkah (ii), maka diperoleh

$$(x+y)^{k+1} = (x+y)(x+y)^k$$

$$= (x+y)\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}x^{k-r}y^r$$

$$= \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}x^{k+1-r}y^r + \sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}x^{k-r}y^{r+1}$$

$$= \left\{\binom{k}{0}x^{k+1} + \binom{k}{1}x^k y + \ldots + \binom{k}{k}x^k y^k\right\} +$$

$$\left\{\binom{k}{0}x^k y + \binom{k}{1}x^{k-1}y^2 + \ldots + \binom{k}{k}y^{k+1}\right\}$$

$$= \binom{k}{0}x^{k+1} + \left\{\binom{k}{1} + \binom{k}{0}\right\}x^k y + \left\{\binom{k}{2} + \binom{k}{1}\right\}x^{k-1}y^2 + \ldots$$

$$+ \left\{\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}\right\}xy^k + \binom{k}{k}y^{k+1}$$

Menurut identitas pascal (teorema 3.1), kita peroleh

$$(x+y)^{k+1} = \binom{k}{0}x^{k+1} + \binom{k+1}{1}x^k y + \binom{k+1}{2}x^{k-1}y^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}xy^k + \binom{k}{k}y^{k+1}$$

Akan tetapi $\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0} = 1 \; dan \; \binom{k}{k} = \binom{k+1}{k+1} = 1$, sehingga

$$(x+y)^{k+1} = \binom{k+1}{0}x^{k+1} + \binom{k+1}{1}x^k y + \binom{k+2}{2}x^{k-1}y^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}xy^k + \binom{k+1}{k+1}y^{k+1} \; (x+y)^{k+1}$$

$$= \sum_{r=0}^{k+1}\binom{k+1}{r}x^{k+1-r}y^r$$

Karena n = k+1, maka

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}x^{n-r}y^r$$

Terbukti bahwa teorema juga benar untuk n = k+1. Dengan demikian teorema terbukti.

Dari teorema 3.2, diperoleh identintas-identintas berikut

(1) Karena x+y = y+x, sehingga

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r \Leftrightarrow (y+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^r y^{n-r}$$

(2) Karena $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$, maka

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{n-r} x^{n-r} y^r, atau\ (y+x)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{n-r} x^r y^{n-r}$$

(3) untuk x =1 dan y =1, maka

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r$$

$$\Leftrightarrow (1+1)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} 1^{n-r} 1^r$$

$$\Leftrightarrow 2^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \quad \text{atau} \quad 2^n = \sum_{r=0}^{n} C(n,r)$$

(4) untuk x =1 dan y =-1, maka

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r$$

$$\Leftrightarrow (1-1)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} 1^{n-r} (-1)^r$$

$$\Leftrightarrow 0^n = (-1)^n \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}$$

Koefesien-koefesien pangkat bulat non negatif dari $(x+y)^n$ seperti $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{n}$ dan seterusnya hingga $\binom{n}{n}$ untuk n =0, n= 1, n=2, n=3,… dan seterusnya itulah yang kemudian membentuk pola bilangan yang terkenal dengan nama segitiga pascal, suatu penghormatan kepada matematikawan perancis yang bernama Blaise Pascal (1623-1662). Dengan memperhatikan nilai koefesien saja untuk pangkat bulat non negatif dari nol hingga *n* akan diperoleh segitiga pascal seperti yang ditunjukkan pada diagram berikut

$$
\begin{array}{l c}
r=0 & 1 \\
r=1 & 1 \quad 1 \\
r=2 & 1 \quad 2 \quad 1 \\
r=3 & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
r=4 & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
r=5 & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
. & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
. & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
. & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
r=n & 1 \quad n \quad \ldots \quad \ldots \quad 1.2\ldots n \quad \ldots \quad \ldots \quad n \quad 1
\end{array}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{array}{l c}
n=0 & \binom{0}{0} \\
n=1 & \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
n=2 & \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
n=3 & \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
n=4 & \binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4} \\
n=5 & \binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5} \\
. & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
. & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
. & . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
n=n & \binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \ldots \quad \ldots \quad \binom{n}{r} \quad \ldots \quad \ldots \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}
\end{array}
$$

dengan adanya kesesuaian itu maka perhitungan-perhitungan kombinasi yang hanya melibatkan bilangan-bilangan kecil langsung dapat dilakukan berdasarkan kesesuaian dengan bilangan segitiga pascal.

3.2 Ragam Soal dan Pembahasan

Contoh 4.1.

hitunglah K, jika K = $\dfrac{C_2^4 . C_1^2}{C_2^5}$

jawab

K = $\dfrac{C_2^4 . C_1^2}{C_2^5}$ = $\dfrac{6.2}{10}$ = $\dfrac{12}{10}$ = $\dfrac{6}{5}$

Contoh 4.2

Uraikan ekspresi dibawah ini dengan menggunakan teorema binomial

a. $(2x+5y)^3$

b. $(x-4y)^4$

Penyelesaian

a. $(2x+5y^3)=\binom{3}{0}(2x)^3+\binom{3}{1}(2x)^2(5y)+\binom{3}{2}(2x)(5y)^2+\binom{3}{3}(5y)^3$

$=1.8x^3+3.4.5\,x^2y+3.2.25.xy^2+1.125.y^3$

$=8x^3+60\,x^2y+150xy^2+125.y^3$

b. $(x-4y)^4=\{x+(-4y)\}^4$

$=$

$\binom{4}{0}(x)^4+\binom{4}{1}(x)^3(-4y)+\binom{4}{2}(x)^2(-4y)^2+\binom{4}{3}(x)(-4y)^3+\binom{4}{4}(-4y)^4$

$=1.x^4+4.(-4)x^3y+6.16x^2y^2+4(-4)^3xy^3+1(-4)^4y^4$

$=x^4-16x^3y+96x^2y^2-256xy^3+256y^4$

Contoh 4.3

Gunakan teorema binomial untuk menghitung $(1{,}01)^5$ dalam bentuk decimal?

Penyelesaian

$(1{,}01)^5=(1+0{,}01)^5$

$=\binom{5}{0}1^5+\binom{5}{1}(1)^3(0{,}01)+\binom{5}{2}(1)^3(0{,}01)^2+\binom{5}{3}(1)^2(0{,}01)^{33}+\binom{5}{4}(1)(0{,}01)^4+\binom{5}{5}(0{,}01)^5$

= 1+5(0,01)+10(0,0001)+10(0,000001)+5(0,00000001) + 0,0000000001

= 1 + 0,05+ 0,001 + 0,00001 + 0,00000005 + 0,0000000001

= 1,0510100501.

Contoh 4.4

Berdasarkan sifat $2^n=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}$, kita memperoleh

Nilai dari $\binom{2021}{0}+\binom{2021}{1}+\binom{2021}{2}+\ldots+\binom{2021}{2021}$ = 2^{2021}

Contoh 4.5

Hitunglah $\sum_{i=0}^{j}\binom{n+i-1}{i}$=....?

Penyelesaian

Berdasarkan identitas pascal (teorema 3.1) dan mengekspansikan suku-suku dalam bentuk jumlah, diperoleh

$$\sum_{i=0}^{j}\binom{n+i-1}{i}=\binom{n-1}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+j-1}{j}$$

$$=\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\binom{n+2}{3}+\ldots+\binom{n+j-1}{j}$$

$$=\binom{n+j}{j}$$

Jadi, kita memperoleh $\sum_{i=0}^{j}\binom{n+i-1}{i}=\binom{n+j}{j}$

Contoh 4.6

Tentukan Koefesien suku ke-4 dari penjabaran $\left(2a-\frac{3b}{2}\right)^{10}$?

Penyelesaian

Perhatikan bahwa koefesien suku ke-*k* dari penjabaran binomial (*ax*+by)^n ditentukan oleh $\binom{n}{k-1}a^{n-k+1}b^{k-1}$

Untuk koefesien suku ke-4 dari penjabaran binomial (*ax*+by)^n adalah

$$U_4=\binom{10}{4-1}2^{10-4+1}(-\tfrac{3}{2})^{4-1}$$

$$=\binom{10}{3}2^7(-\tfrac{3}{2})^3$$

$$=-\frac{10!}{3!.7!}.\ 24.3^3$$

= -51.840

Jadi, koefisien suku keempat adalah -51.840

D. Latihan 3

1. Uraiakan ekspresi dibawah ini menggunakan teorema binomial
   a. $\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2020}$
   b. $\left(px^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{qx^{3}}\right)^{9}$
2. Hitunglah koefesien x^3y^7 dalam ekspresi $(2x-3y)^7$ dengan menggunakan teorema binomial? dan hitung juga jumlah koefesiennya?
3. Hitunglah dengan menggunakan teorema binomial :
   a. $(0,9)^5$
   b. $\sqrt[1999]{2020}$
4. Tunjukkan **Identitas Pascal** : Jika n dan r bilangan bulat dengan *1*≤ r ≤ *n maka* berlaku $\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}=\binom{n}{r}$
5. Untuk setiap bilangan positif i ≥ 2, tentukan Nilai dari $\sum_{i=2}^{k} i(i-2)\binom{k}{i}$ =…?
6. Misalkan n adalah bilangan bulat positif, buktikan bahwa $\sum_{r=1}^{k}\frac{(-1)^{r-1}}{r}\binom{k}{r}$ = $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}$

A. Capaian Pembelajaran Mata kuliah (CPMK)
Mahasiswa mampu menjelaskan prinsip sangkar burung merpati dan menerapkannya untuk membuktikan sebuah pernyataan matematis secara logis, ktritis dan analitis melalui kinerja mandiri, tanggung jawab dan pantang menyerah .

B. Kemampuan Akhir yang Diharapkan (Sub-CPMK)
1. Menjelaskan prinsip sangkar burung merpati /*pigeon hole*
2. Menerapkan prinsip sangkar burung merpati /*pigeon hole* untuk membuktikan suatu pernyataan (**teorema 4.1**: jika ada *k+1* atau lebih obyek ditempatkan pada *k* kotak maka ada kotak berisi minimum 2 obyek**)**

C. Materi

4.1 Pengantar Prinsip Sangkar Merpati

Prinsip Sangkar Burung Merpati (*the pigeon hole principle*) pertama kali ditemukan oleh seorang ilmuwan matematika jerman bernama *Gustav Lejeune Dirichlet* pada tahun 1834 M. Oleh karena itu prinsip ini disebut juga dengan *drawer dirichlet principle*. Prinsip ini menarik dibahas karena dapat digunakan untuk memecahkan sejumlah masalah dalam menduga atau memperkirakan nilai minimal yang harus dipenuhi.

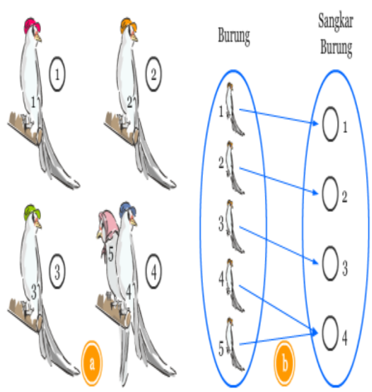
Gambar 4. 1 Tokoh Gustav Lejeune Dirichlet

Secara sederhana prinsip ini berbunyi bahwa jika jumlah burung merpati lebih banyak dari jumlah sangkarnya (semua merpati masuk sangkar, dan setiap sangkar memuat semua merpati) maka paling sedikit ada satu sangkar yang berisi minimal dua merpati. Secara formal, prinsip ini dapat di tulis pada teorema 4.1 berikut.

Gambar 4. 2 Ilustrasi Prinsip Sangkar Merpati

Teorema 4.1

Jika $k + 1$ atau lebih objek ditempatkan ke dalam k kotak, maka ada kotak berisi minimum dua objek.



Bukti

Anggaplah bahwa tidak satupun kotak yang berisi lebih dari satu objek, maka setiap kotak berisi satu objek atau kosong, berarti setiap kotak berisi maksimal satu objek. Dengan demikian, untuk k kotak, seluruhnya akan memuat paling banyak k objek. Hal ini bertentangan dengan keadaan semua objek sebanyak k + 1 harus masuk kotak.

Gambar 4. 3 Ilustrasi Pembuktian Prinsip Sangkar Merpati

Contoh 4.1

Perhatikan beberapa kasus berikut:

1. Diantara 13 mahasiswa selalu ada 2 mahasiwa yang mempunyai bulan lahir yang sama. Dalam hal ini banyaknya mahasiswa identik dengan banyaknya burung dan jumlah bulan dalam setahun yaitu ada 12 identik dengan jumlah sangkar burung merpati. Dengan kata lain banyaknya burung melebihi banyaknya sangkar.
2. Dari 8 orang mahasiswa minimal ada 2 mahasiswa yang lahir pada hari yang sama. Dalam hal ini banyaknya mahasiswa identik dengan banyaknya burung dan jumlah hari dalam seminggu yaitu ada 7 hari identik dengan jumlah sangkar burung merpati. Dengan kata lain banyaknya burung melebihi banyaknya sangkar.

3. Jika kn + 1 kelereng didistribusikan ke dalam n kotak, maka satu kotak akan berisi paling tidak k+ 1 kelereng.
4. Sebuah garis l di dalam bidang melalui sisi-sisi segitiga ABC dengan tidak melewati titik sudutnya. Maka, garis itu tidak akan melewati ketiga sisi segitiga

4.2 Aplikasi Prinsip Sangkar Merpati

Berikut beberapa contoh penerepan Prinsip sangkar Merpati

Contoh 4.2

1. Seorang Anak bermain dengan menutup matanya mengambil bola-bola berbeda warna dalam keranjang yang berisi: 12 bola berwarna hitam dan 10 bola berwarna putih yang tersebar secara acak. Berapa bola minimal yang diambil Anak tersebut agar dapat memperoleh sepasang bola dengan warna yang sama?
2. Seperti nomor 1 di atas. Sekarang, di keranjang ada 12 bola berwarna hitam, 13 bola berwarna putih, 20 bola berwarna biru, 5 bola berwarna merah, 1 bola berwarna hijau, dan 1 bola berwarna kuning. Berapa banyak bola minimal yang harus diambil agar setidaknya:
   a) terdapat 2 bola yang memiliki warna yang sama
   b) terdapat 2 bola yang memiliki warna yang berbeda.

Alternatif Penyelesaian

1. Cukup 3 bola saja
2.
   a) Kemungkinan terburuk yaitu saat mengambil 6 bola yang semuanya berbeda warna (hitam, putih, biru, merah, hijau, dan kuning). Oleh karena itu, banyak bola minimal yang harus diambil agar setidaknya terdapat 2 dua bola dengan warna sama adalah 7 buah.
   b) Kemungkinan terburuk yaitu saat mengambil 20 bola yang semuanya berwarna biru. Oleh karena itu, bola minimal yang harus diambil agar setidaknya terdapat 2 bola dengan warna berbeda adalah 21 buah.

Contoh 4.3

Diberikan barisan bilangan dari 1,2,3,...,100. Jika dari barisan bilangan tersebut diambil 51 bilangan, buktikan bahwa paling tidak ada 2 bilangan yang selisihnya 50.

Alternatif Penyelesaian
Bukti:
Diberikan barisan dari k+1 sampai 2n, sebagai berikut: k+1, k+2, k+3, k+4,…,k+2n-1, k+2n. Dengan demikian, akan terdapat pasangan bilangan yang selisihnya n, seperti (k+1, k+n+1), (k+2, k+n+2), ... , (k+n, k+2n). Jumlah seluruh pasangan ini berjumlah n. Maka, dengan mengambil bilangan yang minimal n+1, maka pasti akan selalu ada pasangan bilangan yang selisihnya n. Soal di atas diambil a = 0 dan n=50.

Contoh 4.5
Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif n, terdapat bilangan kelipatan n yang angka-angkanya hanya angka “0” dan “1” !

Alternatif Penyelesaian

Ilustrasi dari pesoalan di atas dapat ditunjukkan pada Tabel berikut.

bilangan *n*	**bilangan yang terdiri dari angka “1”dan angka “0”**
2	10 = 5.2
3	110 = 370.3
4	100 = 25. 4
.	...
6	...
.	...
n	11...10...0= $a.n$, $a \in Z^{+}$

Pada Tabel di atas menunjukkan bilangan-bilangan pada kolom 2 berkelipatan n yang angka-angkanya terdiri dari angka “1” dan angka “0”

Bukti secara khusus
Misal :
Kemungkinan terburuknya adalah saat memilih sebanyak 7 bilangan yang terdiri dari angka “1”. Jika bilangan-bilangan tersebut dibagi dengan 6, maka ada 6 kemungkinan sisa hasil pembagian tersebut yaitu : 0, 1, 2, 3, 4, 5. Sehinga pasti ada dua bilangan dalam barisan tersebut jika dibagi 6 memiliki sisa yang sama seperti ditunjukkan pada gambar di bawah ini.

barisan bilangan: 1 11 111 1.111 11.111 111.111 1.111.111

Sisa pembagian oleh 6 yaitu : 0, 1, 2, 3, 4, 5

Kemudian kita pilih dua bilangan yang memiliki siswa yang sama, misal kedua bilangan tersebut adalah “11.111” dan “11” lalu kita kurangkan kedua bilangan tersebut sehingga diperoleh bilangan yang terdiri dari angka “1”dan angka “0”

$$\begin{array}{rl} 11.111 = & 1851.6 + 5 \\ 11 = & 1.6 + 5 \\ \hline 11.100 = & 1850.\,6 + 0, \end{array} -\quad 1850 \in Z^{+}$$

Jadi, bilangan 11.100 adalah bilangan berkelipatan 6 yang terdiri dari angka “1”dan angka “0”

Secara umum

Pikirkan barisan bilangan bulat positif yang terdiri dari angka "1" sebanyak n+1 bilangan. Jika bilangan-bilangan tersebut di bagi *n*, maka ada *n* kemungkinan sisa pembagian, yaitu : 0, 1, 2, 3,…., n-1 sehingga pasti ada dua bilangan dalam barisan tersebut jika dibagi *n* memiliki sisa yang sama.

$$\text{barisan bilangan: } 1,\ \underbrace{11,\ 111,\ 1.111,\ \ldots,\ 111\ldots11}_{n+1 \text{ bilangan}}$$

Sisa pembagian oleh n yaitu : 0, 1, 2, …, n -1

Misal kedua bilangan yang dipilih tersebut adalah *p* dan *q*, *p* < *q*, dan sisa pembagian oleh n adalah *r*

$$\begin{array}{lll} q & = 111\ldots111\ldots11 & = a.n + r \\ p & = \qquad\quad 11\ldots11 & = b.n + r \quad - \\ \hline q\text{-}p & = 111..\ 100\ldots00 & = (a\text{-}b)n, \quad (a\text{-}b) \in Z^{+} \end{array}$$

Jadi, q-p adalah bilangan berkelipatan n, dimana (q-p) adalah sebuah bilangan yang terdiri dari angka "1"dan angka "0. Sehingga terbukti bahwa untuk setiap bilangan bulat positif n, terdapat bilangan kelipatan n yang angka-angkanya hanya angka "0" dan "1".

D. Latihan 4

1. Diberikan sebelas buah bilangan berbeda. Buktikan bahwa dua di antara bilangan-bilangan tersebut memiliki selisih yang merupakan kelipatan 10

2. Diketahui n buah bilangan bulat. Tunjukkan bahwa ada salah satu atau jumlah beberapa bilangan tersebut habis dibagi n!

3. Dua puluh lima team bola basket memasuki turnamen yang akan berlangsung 10 hari. Tunjukkan bahwa pada akhir hari ke-4, paling sedikit satu dari dua puluh lima team memainkan sebanyak genap pertandingan!

4. Jika ada 13 orang yang menghadiri ulang tahun Pak Ahmad yang ke-40, maka tunjukkan bahwa paling sedikit terdapat 2 orang yang mempunyai bulan kelahiran yang sama!

5. Dalam satu kelompok yang terdiri dari 10 orang, maka tunjukkan terdapat dua umur yang jumlah atau selisihnya habis dibagi 16.

BAB 5
FUNGSI PEMBANGKIT

A. Capaian Pembelajaran Mata kuliah (CPMK)

Capaian pembelajaran pada materi perkuliahan ini adalah Mahasiswa mampu menjelaskan fungsi pembangkit dan menerapkannya untuk menyelesaikan persoalan permutasi dan persoalan kombinasi dengan cara berpikir sistematis dan analitis melalu kinerja mandiri, tanggung jawab dan pantang menyerah.

B. Kemampuan Akhir yang Diharapkan (Sub-CPMK)

1. Menentukan deret taylor dari fungsi *f* disekitar *c* = 0 yaitu : *f*(*x*) = $\sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}.(0)\frac{x^n}{n!} = f(0) + f^{(1)}(0)x + f^{(2)}0)\frac{x^2}{2!} + \ldots$ yang disebut deret maclaurin untuk menemukan formula dasar seperti fungsi sinus, fungsi eksponen, fungsi pecahan yang digunakan untuk menentukan fungsi pembangkit.
2. Menentukan fungsi pembangkit biasa (FPB) dari barisan a_n
3. Menentukan fungsi pembangkit eksponensial (FPE) dari barisan a_n
4. Menentukan barisan a_n jika diketahui FPB dan FPE-nya.
5. Menyelesaikan masalah kombinasi dengan menggunakan fungsi pembangkit biasa (FPB)
6. Menyelesaikan masalah permutasi dengan menggunakan fungsi pembangkit eksponensial

C. Materi

Dalam bab ini akan diperkenalkan teknik menghitung (mencacah) objek-objek diskrit dengan beberapa syarat-syarat yang harus dipenuhi. Salah teknik yang dimaksud menggunakan fungsi pembangkit *(Ordinaring Generating Fungction)*.

5.1 Deret Kuasa

Berikut disajikan bentuk *deret **Taylor*** dari fungsi *f* dititik c.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(c)}{n!}(x-c)^n$$

$$= f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \ldots$$

Khusus untuk nilai c = 0, kita memperoleh deret berikut yang dinamakan **deret maclaurin :**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^n(0)\frac{x^n}{n!}$$

$$= f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Deret maclaurin banyak digunakan untuk menentukan nilai hampiran berbagai fungsi, misalnya fungsi pecahan, fungsi eksponen, fungsi sinus, dan fungsi cosinus. Perhatikan beberapa contoh perluasan deret maclaurin untuk beberapa fungsi berikut.

Contoh 5.1

Tentukan Deret maclaurin dari fungsi :

a. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, b. $f(x) = e^x$

Penyelesaian

a. $f(x) = \dfrac{1}{1-x} \Rightarrow f(0) = \dfrac{1}{1-0} = 1 = 0!$

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{1^2} = 1 = 1!$$

$$f''(x) = \frac{2.1}{(1-x)^3} \Rightarrow f''(0) = \frac{2.1}{1^3} = 2.1 = 2!$$

$$f'''(x) = \frac{3.2.1}{(1-x)^4} \Rightarrow f'''(0) = \frac{3.2.1}{1^4} = 3.\,2.1 = 3!$$

$$f''''(x) = \frac{4.3.2.1}{(1-x)^5} \Rightarrow f''''(0) = \frac{4.3.2.1}{1^5} = 4.\,3.2.1 = 4!$$

$$\vdots = \vdots \Rightarrow \vdots = \vdots$$

$$f^n(x) = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)...3.2.1}{(1-x)^{n+1}} \Rightarrow f^n(0) = n!$$

Sehingga diperoleh

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^n(0)\frac{x^n}{n!}$$

$$= f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + ...$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} f^n(0)\frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} n!\frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{atau}$$

$= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

Jadi, $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \; |x| < 1, \forall x \in \Re$ **(F.1)**

b. $f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = e^0 = 1$

$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = e^0 = 1$

$f'''(x) = e^x \Rightarrow f'''(0) = e^0 = 1$

$\vdots = \vdots \Rightarrow \vdots = \vdots$

$f^n(x) = e^x \Rightarrow f^n(0) = 1$

Sehingga diperoleh

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} f^n(0)\frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 1\frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{atau}$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Jadi, $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots \quad \forall x \in \Re$ **(F.2)**

Perluasan deret maclaurin untuk beberapa fungsi yang lain dapat disajikan pada formula-formula berikut.

1. $\dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \; |x| < 1, \forall x \in \Re$ **(F.3)**
2. $\dfrac{1}{1-x^2} = \sum_{n=2k}^{\infty} x^n = 1 + x^2 + x^4 + \ldots \; |x| < 1, k \geq 0, \forall x \in \Re$ **(F.4)**
3. $\dfrac{x}{1-x^2} = \sum_{n=2k+1}^{\infty} x^n = x + x^3 + x^5 + \ldots \; |x| < 1, k \geq 0, \forall x \in \Re$ **(F.5)**
4. $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots \; |x| < 1, \forall x \in \Re$ **(F.6)**

5. $\frac{1}{1-ax}$ = $\sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n$ = $1+ax+a^2x^2+a^3x^3+\ldots \; |x|<1, \; \forall x, a \in \Re$ **(F.7)**

6. e^{-x} = $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n!}$ = $1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots \;\; k \geq 0, \; \forall x \in \Re$ **(F.8)**

7. $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ = $\sum_{n=2k+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ = $\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots \; k \geq 0, \; \forall x \in \Re$ **(F.9)**

8. $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ = $\sum_{n=2k}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ = $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots \;\; k \geq 0, \; \forall x \in \Re$ **(F.10)**

9. e^{ax} = $\sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{x^n}{n!}$ = $1+a\frac{x}{1!}+a^2\frac{x^2}{2!}+a^3\frac{x^3}{3!}+\ldots \; k \geq 0, \forall x, a \in \Re$ **(F.11)**

10. $(1+x)^k$ = $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n$, $|x|<1, \; \forall x \in \Re$ **(F.12)**

$$dengan \quad \binom{k}{n} = \begin{cases} \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)\ldots(k-n+1)}{k!} & , \; jika \; k>0 \\ 1 & , \; jika \; k=0 \end{cases}$$

11. $(1+x)^{-k}$ = $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \binom{k+n-1}{n} x^n$,dengan $k \in P, |x|<1, \; \forall x \in \Re$

(F.13)

12. $\frac{1}{(1-x)^k}$ = $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{n} x^n$ **, dengan** $k \in \mathrm{P}, \; |x|<1, \; \forall x \in \Re$ **(F.14)**

13. $(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \qquad \forall x \in \Re$ **(F.15)**

14. $\cos x$ = $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ = $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots \;\; \forall x \in \Re$ **(F.16)**

15. $\sin x$ = $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ = $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots \;\; \forall x \in \Re$ **(F.17)**

Catatan : Bukti Formula (F.3 s/d F.17) di atas dibiarkan sebagai tugas.

Berdasarkan formula-formula di atas dengan mudah kita dapat menentukan deret kuasa yang lebih kompleks tampa menggunakan deret maclaurin. Perhatikan **contoh 5.2** berikut.

Contoh 5.2

Tentukan deret kuasa dari fungsi-fungsi berikut.

a. $\dfrac{1}{1-3x}$ c. $\dfrac{2}{2+3x}$

b. e^{5x} d. $(3+3x+3x^2+3x^3+...)^3$

Alternatif Penyelesaian

a. $\dfrac{1}{1-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$ **, atau**

$= 1+3x+3^2x^2+3^3x^3+...$ **(F.7)**

b. $e^{5x} = \sum_{n=0}^{\infty} 5^n \dfrac{x^n}{n!}$ **(F.11)**

$= 1+5\dfrac{x}{1!}+5^2\dfrac{x^2}{2!}+5^3\dfrac{x^3}{3!}+...$

c. $\dfrac{2}{2+3x} = \dfrac{1}{1+\frac{3}{2}x}$, kemudian subtitusi $\frac{3}{2}x$ pada x dalam F.3, sehingga diperoleh:

$$\frac{2}{2+3x} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\tfrac{3}{2}x\right)^n$$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\tfrac{3}{2}\right)^n x^n$ **, atau**

$$= 1+\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2 x^2+\left(\frac{3}{3}\right)^3 x^3+...$$

d. $(3+3x+3x^2+3x^3+...)^3$ $= \left(3(1+x+x^2+3x^3+...)\right)^3$

$= 3^3(1+x+x^2+x^3+...)^3$

$= 3^3\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^3$ **(F.1)**

$$= 27\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{n}x^n \qquad \textbf{(F.14)}$$

$$= 27\binom{2}{0} + 27\binom{3}{1}x + 27\binom{4}{2}x^2 + \ldots$$

5.2 Definisi Fungsi Pembangkit

Definisi 5.1

Misalkan a_n = a_0, a_1, a_2, a_3,..., $a_{n,\ldots}$ adalah sebuah barisan bilangan, n≥ 0.

Fungsi Pembangkit Biasa (*Ordinary generating function*) dari barisan a_n adalah deret kuasa

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

Definisi 5.2

Misalkan a_n = a_0, a_1, a_2, a_3,..., $a_{n,\ldots}$ adalah sebuah barisan bilangan, n≥ 0.

Fungsi Pembangkit Eksponensial (Eksponencial generating function) dari barisan a_n adalah deret kuasa

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} = a_0 + a_1\frac{x}{1!} + a_2\frac{x^2}{2!} + a_3\frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Contoh 5.3

1. Fungsi Pembangkit Biasa, *G*(*x*) dari barisan $a_n = (1, 1, 1, 1, \ldots)$ adalah...

Penyelesaian

Barisan $a_n = (1, 1, 1, 1, \ldots)$ dapat juga dinyatakan dengan a_n = 1.

Dari definisi fungsi pembangkit **(definisi 4.1),** diperoleh:

Cara 1

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 1x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= \frac{1}{1-x} \qquad \textbf{(lihat F.1)}$$

Cara 2

$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$

$G(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

$= \dfrac{1}{1-x}$ **(lihat F.1)**

Jadi, Fungsi Pembangkit Biasa dari barisan a_n = (1, 1, 1,1, ,...) adalah $G(x) = \dfrac{1}{1-x}$

2. Fungsi Pembangkit Eksponensial, $G(x)$ dari barisan $a_n = 1$ adalah...

Penyelesaian

Barisan $a_n = 1$ dapat juga dinyatakan dengan a_n = (1,1,1,1,...)

Dari definisi fungsi pembangkit eksponensial **(definisi 5.2),** diperoleh:

Cara 1

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$= e^x$ **(lihat F.2)**

Cara 2

$$G(x) = a_0 + a_1 \frac{x}{1!} + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$G(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$= e^x$ **(lihat F.2)**

Jadi, Fungsi Pembangkit Biasa dari barisan a_n = (1, 1, 1,1, ...) adalah $G(x) = e^x$

3. Fungsi Pembangkit Biasa, $G(x)$ dari barisan $a_n = (1, 0, 1, 0, \ldots)$ adalah...

Penyelesaian

Barisan $a_n = (1, 0, 1, 0, ...)$ dapat juga dinyatakan dengan

$$a_n = \begin{cases} 1, & jika \quad n = 0, 2, 4, ...(suku\ genap) \\ 0, & jika \quad n = 1, 3, 5, ...(suku\ ganjil) \end{cases}$$

Dari definisi fungsi pembangkit biasa **(definisi 5.1),** diperoleh:

Cara 1

$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$G(x) = \sum_{n=0,2,4,..}^{\infty} x^n$

$= \frac{1}{1-x^2}$ **(lihat F.4)**

Cara 2

$G(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...$

$G(x) = 1 + 0 + x^2 + 0 + ...$

$= 1 + x^2 + x^4 + ...$

$= \frac{1}{1-x^2}$ **(lihat F.4)**

4. Fungsi Pembangkit Biasa, *G(x)* dari barisan $a_n = (1, 2, 3, 4, ...)$ adalah…

Penyelesaian

Barisan $a_n = (1, 2, 3, 4, ...)$ dapat juga dinyatakan dengan $a_n = n+1, n \geq 0$

Dari definisi fungsi pembangkit biasa **(definisi 5.1),** diperoleh:

Cara 1

G(x) $= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$

$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty} nx^n + \frac{1}{1-x}$ ....…………….........................(*)

Berdasarkan **F.1** kita dapat mencari suku pertama di ruas kanan pada persamaan (*), diperoleh :

$\frac{1}{1-x}$ = $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, diferensialkan kedua ruas terhadap x

$\frac{1}{(1-x)^2}$ = $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$, kalikan kedua ruas dengan x

$\frac{x}{(1-x)^2}$ = $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$

Subtitusikan $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ pada persamaan (*) di atas, diperoleh:

G(x) = $\frac{x}{(1-x)^2}$ + $\frac{1}{1-x}$

= $\frac{1}{(1-x)^2}$

Cara 2

G(x) = $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$

G(x) = $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$

= $\frac{1}{(1-x)^2}$ **(lihat F.6)**

Jadi, Fungsi Pembangkit Biasa dari barisan $a_n = (1, 2, 3, 4, \ldots)$ adalah *G(x)* = $\frac{1}{(1-x)^2}$

E. Fungsi Pembangkit Eksponensial, *G*(*x*) dari barisan

$$a_n = \begin{cases} 0, & jika \;\; 0 \le n \le 2 \\ 2, & jika \;\; n \ge 3 \end{cases}$$

adalah….

Penyelesaian

Barisan a_n di atas dapat juga dinyatakan dengan a_n = (0, 0, 0, 2, 2, 2,…)

G(x) = $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 0 \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} 2 \frac{x^n}{n!}$$

$$= 2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ ....(**)}$$

Selanjutnya kita dapat menentukan deret kuasa $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ pada persamaan (**) berdasarkan **F.2,** sehingga diperoleh :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\Leftrightarrow e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{2e^x - 2x^2 - 2x - 2}{2}$$

Subtitusikan $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{2e^x - 2x^2 - 2x - 2}{2}$ pada persamaan (**) di atas, diperoleh:

$$G(x) = 2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= 2 \left(\frac{2e^x - 2x^2 - 2x - 2}{2} \right)$$

$$= 2(e^x - x^2 - x - 1)$$

Jadi, Fungsi Pembangkit Eksponensial dari barisan a_n = (0, 0, 0, 2, 2, 2,...) adalah *G(x)* = $2(e^x - x^2 - x - 1)$

Teorema 5.1

Misalkan *F(x)* = $\sum_{n=0}^{\infty} a_k x^k$ dan *G(x)* = $\sum_{n=0}^{\infty} b_k x^k$, maka

a. *F(x)* $\pm$*G(x)* = $\sum_{n=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) x^k$

b. $F(x).G(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} a_k b_{k-n}\right)x^k$

BUKTI

Diketahui : $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_k x^k$ dan $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_k x^k$, Sehingga

$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_k x^k + ...$

$G(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + ... + b_k x^k + ...$

maka untuk persamaan pada teorema 5.1a

$F(x) \pm G(x) =$

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_k x^k + ... \pm (b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_k x^k + ...)$

$= a_0 \pm b_0 + a_1 x \pm b_1 x + a_2 x^2 \pm b_2 x^2 + ... + a_k x^k \pm b_k x^k + ...$

$= (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + (a_2 \pm b_2)x^2 + ... + (a_k \pm b_k)x^k + ...$

$F(x) \pm G(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_k \pm b_k)x^k$

untuk persamaan pada teorema 5.1b

$F(x).G(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_k x^k + ...)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_k x^k + ...)$

$= a_0(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_k x^k + ...) + a_1 x(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_k x^k + ...) +$
$a_2 x^2(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_k x^k + ...) + ... + a_k x^k(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_k x^k + ...) + ...$

$= (a_0 b_0 + a_0 b_1 x + a_0 b_2 x^2 + ... + a_0 b_k x^k + ...) + (a_1 b_0 x + a_1 b_1 x^2 + a_1 b_2 x^3 + ... +$
$a_1 b_k x^{k+1} + ...) + (a_2 b_0 x^2 + a_2 b_1 x^3 + a_2 b_2 x^4 + ... + a_2 b_k x^{k+2} + ...) + ... + (a_k b_0 x^k +$
$a_k b_1 x^{k+1} + a_k b_1 x^3 + a_k b_2 x^{k+2} + ... + a_k b_k x^{2k} + ...) + ...$

$= a_0(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_k x^k + ...) + a_1 x(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_k x^k + ...) +$
$a_2 x^2(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_k x^k + ...) + ... + a_k x^k(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_k x^k + ...) + ...$

$= a_0 b_0 + a_0 b_1 x + a_1 b_0 x + ... + a_0 b_2 x^2 + a_1 b_1 x^2 + a_2 b_0 x^2 + ... + a_0 b_k x^k + a_k b_0 x^k + ...$

$F(x).G(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} a_k b_{k-n}\right)x^k$

Dari definisi fungsi pembangkit dapat diketahui bahwa barisan a_n adalah koefesien x^n atau $\frac{x^n}{n!}$ dalam G(x). Bagaimana cara menentukan a_n Jika fungsi pembangkit *G(x)* diketahui?. Perhatikan contoh 5.4 berikut.

Contoh 5.4

Cari barisan a_n dari fungsi pembangkit biasa berikut.

a. G(x) = $\dfrac{1}{1+5x}$

b. G(x) = $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$

Penyelesaian

a. Akan dicari koefesien x^n pada G(x) = $\dfrac{1}{1+5x}$. Dari F.3 diperoleh

$$\frac{1}{1+5x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-5)^n x^n$$

Jadi, $a_n = (-5)^n, \quad n \geq 0$

b. Akan dicari koefesien x^n pada G(x) = $(x+x^2+x^3+x^4+...)^3$

G(x) = $(x+x^2+x^3+x^4+...)^3$

$$= \left(x\left(1+x^2+x^3+x^3+..\right)\right)^3$$

$$= x^3\left(\frac{1}{1-x}\right)^3$$

$$= x^3\sum_{n=0}^{\infty}\binom{3+n-1}{n}x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{n}x^{n+3}$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty}\binom{n-1}{n-3}x^n$$

Jadi, $a_n = \begin{cases} 0, & 0 \leq n \leq 2 \\ \binom{n-1}{n-3}, & n \geq 3 \end{cases}$

atau

$$a_n = \left(0, 0, 0, \binom{2}{0}, \binom{3}{1}, \binom{4}{2}, ..., \binom{n-1}{n-3}, ...\right)$$

5.3 Aplikasi Fungsi Pembangkit

Banyak sekali masalah yang sering kita temukan dalam kehidupan sehari-hari seperti masalah pembagian suatu tugas, kesempatan, atau benda yang perlu didistribusikan kepada sejumlah orang tertentu dengan berdasarkan syarat-syarat yang harus dipenuhi.

Sebagai contoh, Misalkan Himpunan Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika (HMPS-PM) membagikan Cinderamata dalam bentuk gantungan kunci sebanyak 12 buah kepada tiga orang mahasiswa baru A, B, C. HMPS-PM tertarik untuk mengetahui ada berapa cara yang dilakukan, jika mahasiswa A harus memperoleh Cinderamata gantungan kunci paling sedikit 4 buah, Mahasiswa B paling sedikit 2 buah, namun Mahasiswa C tidak lebih dari 5 buah.

Tabel berikut menunjukkan distribusi Cinderamata yang dapat dilakukan HMPS-PM pada ketiga Mahasiswa Baru.

Tabel 5.1 Distribusi Cinderamata Dilakukan HMPSPM Kepada Ketiga Mahasiswa Baru

Cara	A	B	C
1	4	3	5
2	4	4	4
3	4	5	3
4	4	6	2
5	5	2	5
6	5	3	4
7	5	4	3
8	5	5	2

Pertanyaan:

Bagaimana cara mengetahui banyak cara mendistribusikan cinderamata tersebut tampa harus mendaftar semua kemungkinan, apalagi kalau jumlah cinderamatanya banyak dan syaratnya cukup rumit?

Jawaban dari pertanyaan di atas adalah dengan *menggunakan fungsi pembangkit*

Aplikasi fungsi pembangkit dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan permutasi dan persoalan kombinasi.

5.3.1 Aplikasi Fungsi Pembangkit untuk kombinasi

Untuk menyelesaikan persoalan kombinasi dapat digunakan teorema berikut.

TEOREMA 4.2

Misalkan terdapat p jenis objek berbeda, dengan n_i objek jenis i yang berbeda, dan i = 1, 2, 3,…, p. misalkan t_k menyatakan banyak cara mengambil k obyek dimana dibolehkan mengambil sembarang banyak obyek tiap jenis sama dengan koefesien x^k dalam fungsi pembangkit biasa

G(x) $= \sum_{k=0}^{\infty} t_k x^k$ dengan G(X) = $(1+x+x^2+\ldots x^{n_1})\ (1+x+x^2+\ldots x^{n_2})\ldots$ $(1+x+x^2+\ldots x^{n_p})$

Contoh 5.5

Ada berapa cara mengambil n huruf dari huruf-huruf pembentuk kata "MATEMATIKA" sedemikian Hingga setiap konsonan terambil.

Alternatif penyelesaian

Ada 6 huruf yang berbeda, yaitu :

Konsonan : M, T, K

Vokal : A, E, I

Syarat:

- Setiap konsonan terambil artinya minimal 1 (≥ 1)
- Vocal tidak ada syarat maka minimal 0 (≥ 0)

Fungsi pembangkit dari permasalahan di atas adalah

Konsonan : M, T,K

Vokal, A, E,I

G(X)= $(x+x^2+x^3+\ldots)^3\ (1+x+x^2+x^3+\ldots)^3$

Karena banyaknya objek yang diambil *n*,maka akan dicari koefesien x^n pada G(x) yaitu a_n

G(X)= $(x+x^2+x^3+\ldots)^3\ (1+x+x^2+x^3+\ldots)^3$

$= (x\,(1+x^2+x^3+..))^3\ (1+x+x^2+x^3+\ldots)^3$

$= x^3(1+x^2+x^3+..)^3\ (1+x+x^2+x^3+\ldots)^3$

$= x^3(1+x^2+x^3+..)^6$

$= x^3\left(\frac{1}{1-x}\right)^6$ (lihat F.1)

$$= x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{6+n-1}{n} x^n \qquad \text{(lihat F.14)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{5+n}{n} x^{n+3}$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \binom{5+n-3}{n-3} x^n$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \binom{n+2}{n-3} x^n$$

Jadi, banyaknya cara yang dibentuk adalah koefesien x^n pada G(x) yaitu

$$a_n = \begin{cases} 0 & ; n \leq 2 \\ \binom{n+2}{n-3} & ; n \geq 3 \end{cases}$$

Mari kita cek jawaban untuk n= 4 diperoleh

$$a_n = \binom{4+2}{4-3} = \binom{6}{1} = 6$$

Jadi, ada 6 cara mengambil 4 huruf yaitu: (M,M,T,K), (M, T, T,K), (M,T,K,K), (M,T,K, A),(M,T,K,E), dan (M,T,K,I)
Jika n =5, n = 6, maka berapa banyak cara ?

Contoh 5.6

Ada berapa cara menempatkan n objek identik ke dalam *k* kotak berbeda dengan syarat : 2 kotak pertama tidak boleh kosong, Kotak ketiga berisi minimal 5 objek, Kotak keempat berisi paling sedikit 3 dan paling banyak 10 objek ?

Alternatif penyelesaian

Misalkan kotak-kotak tersebut adalah: k_1, k_2, k_3, k_4, k_5,….k_k. dengan kondisi masing masing kotak tersebut adalah $k_1 \geq 1$, $k_2 \geq 1$, $k_3 \geq 5$, $3 \leq k_4 \leq 10$, $k_5 \geq 0$,….$k_k \geq 0$

Fungsi pembangkit dari permasalahan di atas adalah

Dua kotak pertama

Kotak ke-3

Kotak ke-4

Kotak ke-5 hingga ke-*k*

G(X)= $(x+x^2+x^3+\ldots)^2\ (x^5+x^6+\ldots)\ \ (x^3+x^4+\ldots+x^{10})\ (1+x+x^2+x^3+\ldots\ )^{k-4}$

Karena banyaknya objek yang diambil *n maka* akan dicari koefesien x^n pada G(x) yaitu a_n

G(X)= $(x+x^2+x^3+\ldots)^2\ (x^5+x^6+\ldots)\ \ (x^3+x^4+\ldots+x^{10})\ (1+x+x^2+x^3+\ldots+k_k)^{k-4}$

$$= x^2(1+x+x^2+x^3+..)^2$$

$$x^5(1+x+x^2+x^3+..)\ \ x^3(1+x+x^2+\ldots+x^7)$$

$$(1+x+x^2+x^3+\ldots)^{k-4}$$

$$= x^{10}(1+x^2+\ldots+x^7)\ (1+x+x^2+x^3+\ldots)^{k=1}$$

$$= x^{10}\left(\frac{1-x^8}{1-x}\right)\left(\frac{1}{1-x}\right)^{k-1}$$ (lihat F.1 dan F.15)

$$= x^{10}\left(1-x^8\right)\left(\frac{1}{1-x}\right)^{k}$$

$$= \left(x^{10}-x^{18}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{n}x^n$$ (lihat F.14)

$$= x^{10}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{n}x^n - x^{18}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{n}x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{n}x^{n+10} - \sum_{n=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{n}x^{n+18}$$

$$= \sum_{n=10}^{\infty}\binom{k+n-11}{n-10}x^{n} - \sum_{n=18}^{\infty}\binom{k+n-19}{n-18}x^{n}$$

Jadi, banyaknya cara yang dimaksud adalah koefesien x^n pada G(x) yaitu

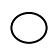
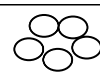
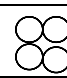
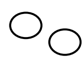
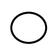
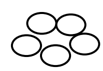
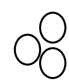
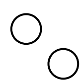
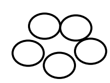
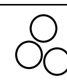
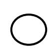
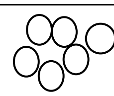
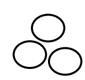
$$a_n = \begin{cases} 0 & ; n \le 9 \\ \binom{k+n-11}{n-10} & ; 10 \le n \le 17 \\ \binom{k+n-19}{n-18} & ; n \ge 18 \end{cases}$$

Sebagai contoh mari kita cek jawaban untuk n = 11 dan k = 4

$$a_{11} = \binom{4+11-11}{11-10} = \binom{4}{1} = 4$$

Jadi, ada 4 cara menempatkan 11 objek identik ke dalam 4 kotak berbeda dengan syarat : 2 kotak pertama tidak boleh kosong, kotak ketiga berisi minimal 5 objek, kotak ketiga berisi minimal 5 objek, kotak keempat berisi paling sedikit 3 dan paling banyak 10 objek. Tabel di bawah ini menunjukkan ilustrasi kemungkinan banyak cara yang dimaksud.

Tabel 5.2 Ilustrasi Kemungkinan menempatkan 11 objek identik ke dalam 4 kotak berbeda

Cara ke-	Kotak 1	Kotak 2	Kotak 3	Kotak 4
1				
2				
3				
4				

5.3.2 Aplikasi Fungsi Pembangkit untuk Permutasi

Untuk menyelesaikan persoalan permutasi dapat digunakan teorema berikut.

TEOREMA 4.3

Misalkan terdapat p jenis objek berbeda, dengan n_i objek jenis i yang sama, dan i = 1, 2, 3,…, p. misalkan t_k menyatakan banyaknya permutasi berlainan dengan panjang k sampai dengan n_i objek dari jenis i yang sama dengan koefesien dari $\frac{x^k}{k!}$ dalam fungsi pembangkit eksponensial G(x)= $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t_k}{k!} x^k$ dengan G (X) = $(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n_1}}{n_1!})$

$$(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n_p}}{n_p!}) \ldots (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^{n_p}}{n_p!})$$

Contoh 5.7

Ada berapa banyak kata sandi panjang *k* yang dapat dibentuk dari kata HAPPY sedemikian hingga huruf vokal muncul dari setiap kata sandi?

Alternatif penyelesaian

Permasalahan ini mengarah pada persoalan permutasi karena dalam pembentukan kata sandi pembolak-balikan huruf yang sama dianggap berbeda. Sehingga solusi untuk menyelesaikan persoalan ini menggunakan fungsi pembangkit eksponensial (FPE). Pada kata HAPPY terdiri dari empat huruf berbeda yaitu H, A, P, Y dengan huruf vokal: A dan Huruf konsonan : H, P, Y. Dengan kondisi masing-masing huruf adalah H ≥ 0, $A \geq 1$, P≥ 0, Y ≥ 0.

Misal G(x) adalah fungsi pembangkit dari permasalahan di atas. Akan dicari koefesien $\frac{x^k}{k!}$ dari G(x) karena panjang kata sandi yang dikehendaki adalah k.Fungsi pembangkit dari permasalahan di atas adalah

Huruf Konsonan: H, P, Y

Huruf Vokal : A

G(X)= $(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots)^3 \; (x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots)$

Dengan menggunkaan F.2 diperoleh

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\Leftrightarrow e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

G(X)= $(e^x)^3 \; (e^x - 1)$

= $e^{3x}(e^x - 1)$

= $e^{4x} - e^{3x}$

= $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4x)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x)^k}{k!}$ (lihat F.11)

= $\sum_{k=0}^{\infty} 4^k \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} 3^k \frac{x^k}{k!}$ (lihat F.11)

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (4^k - 3^k) \frac{x^k}{k!} \qquad \text{(lihat teorema 5.1)}$$

Jadi, banyaknya kata sandi panjang k yang dibentuk dari Kata HAPPY sama dengan koefesien x^k pada G(x) yaitu $a_k = 4^k - 3^k$; $k \geq 0$

Mari kita cek jawaban untuk k = 2
$a_2 = 4^2 - 3^2 = 7$

Jadi, ada 7 kata sandi dengan panjang 2 yang dibentuk dari kata HAPPY dengan syarat yang dmaksud, yaitu: (AA), (AH),(HA), (AP), (PA),(AY),(YA).
Silakan di cek kata sandi panjangnya k ≥ 3 dari persoalan yang dimaksud?

Contoh 5.8

Ada berapa banyak barisan binair *n* - angka yang memuat angka "0" sebanyak ganjil dan angka "1" sebanyak genap?

Alternatif penyelesaian

Barisan binair didefinisikan sebagai barisan yang elemen-elemenya hanya memuat angka "0" dan angka "1". Barisan binair *n* - angka adalah barisan binair dengan panjang *n*. misalnya, 1001,1100, 1010 adalah tiga barisan binair 4 angka. Jadi, barisan binair *n* angka sebanyak genap adalah barisan binair yang panjangnya genap = (0, 2, 4, 6,…,2k) dan barisan binair *n* angka sebanyak ganjil adalah barisan binair yang panjangnya ganjil = (1, 3, 5, 7,…,2k+1).

Mengingat urutan angka diperhatikan maka persoalan ini tergolong persoalan permutasi, sehingga solusi untuk menyelesaikan persoalan ini menggunakan fungsi pembangkit eksponensial (FPE). Dengan kondisi masing-masing angka "0" $\geq 2k+1$, "1" $\geq 2k; k \geq 0$

Misal G(x) adalah fungsi pembangkit dari permasalahan di atas. Akan dicari koefesien $\frac{x^n}{n!}$ dari G(x) karena panjang bilangan binair yang dikehendaki adalah *n*. Fungsi pembangkit dari permasalahan di atas adalah

Angka "0" sebanyak ganjil

Angka "1" sebanyak genap

G(X)= $(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...) \quad (1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...)$

Dengan menggunkaan F.9 dan F.10 diperoleh

G(X)= $\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$

$= \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x})$

$= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2x)^n}{n!}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}2^n\frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\frac{x^n}{n!}\right)$ (lihat F.11)

$= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^n - (-2)^n\right)\frac{x^n}{n!}\right)$ (lihat teorema 5.1)

$= \frac{1}{4}\left(2^n - (-2)^n\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

Jadi, banyaknya barisan yang dimaksud sama dengan koefesien $\frac{x^n}{n!}$ pada G(x) yaitu

$a_n = \frac{2^n - (-2)^n}{4}$, n ≥ 0 atau

$$a_n = \begin{cases} 0 & ; \text{n genap} \\ 2^{n-1} & ; \text{n ganjil} \end{cases}$$

Contoh 5.9

Misalkan Z adalah himpunan angka-angka pembentuk nomor handphone 085338952051. Tentukan cara menyusun barisan *r* – angka dengan syarat angka "0" harus muncul paling banyak 3 dan angka "8" juga harus muncul?

Alternatif penyelesaian

Pada persolan ini ada tujuh anggota z yang berbeda yaitu 0,1, 2, 3, 5, 8, 9. Mengingat urutan angka diperhatikan maka persoalan ini tergolong persoalan permutasi, sehingga solusi untuk menyelesaikan persoalan ini menggunakan fungsi pembangkit eksponensial (FPE). Dengan kondisi sya"rat kemunculan angka pada Z adalah 1 ≤ "0" ≤ 3, "8" ≥ 1, "1" ≥ 0, "2" ≥ 0, "3" ≥ 0, "5" ≥ 0, "9" ≥ 0

Misal G(x) adalah fungsi pembangkit dari permasalahan di atas. Akan dicari koefesien $\frac{x^r}{r!}$ dari G(x) karena panjang bilangan yang dikehendaki adalah *r*. Fungsi pembangkit dari permasalahan yang dimaksud adalah

$$G(x) = (1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})\ (x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots)\ (1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots)^5$$

Perhatikan ekspresi kurung pertama pada fungsi G(x) menyatakan syarat kemunculan angka "0" paling banyak tiga, kemudian ekspresi kurung kedua menyatakan syarat kemunculan angka "8" lebih dari satu kali dan ekspresi kurung ketiga menyatakan lima angka lainnya yang bebas bersayarat. Apabila dilanjutkan dan berdasarkan F.2 diperoleh

$$G(x) = (1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})(e^x-1)\,(e^x)^5$$

$$= (1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!})(e^{6x}-e^{5x})$$

$$= (e^{6x}-e^{5x}) + x(e^{6x}-e^{5x}) + \frac{x^2}{2!}(e^{6x}-e^{5x}) + \frac{x^3}{3!}(e^{6x}-e^{5x})$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(6x)^r}{r!} - \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(5x)^r}{r!} + x\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(6x)^r}{r!} - \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(5x)^r}{r!}\right) + \frac{x}{2!}\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(6x)^r}{r!} - \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(5x)^r}{r!}\right) +$$

$$\frac{x}{3!}r\left(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(6x)^r}{r!} - \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(5x)^r}{r!}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}6^r\frac{x^r}{r!} - \sum_{r=0}^{\infty}5^r\frac{x^r}{r!} + x\left(\sum_{r=0}^{\infty}6^r\frac{x^r}{r!} - \sum_{r=0}^{\infty}5^r\frac{x^r}{r!}\right) + \frac{x}{2!}\left(\sum_{r=0}^{\infty}6^r\frac{x^r}{r!} - \sum_{r=0}^{\infty}5^r\frac{x^r}{r!}\right) +$$

$$\frac{x}{3!}\left(\sum_{r=0}^{\infty}6^r\frac{x^r}{r!} - \sum_{r=0}^{\infty}5^r\frac{x^r}{r!}\right)$$

Berdasarkan teorema 5.1a

$$G(x) = \sum_{r=0}^{\infty}(6^r-5^r)\frac{x^r}{r!} + x\left(\sum_{r=0}^{\infty}(6^r-5^r)\frac{x^r}{r!}\right) + \frac{x^2}{2!}\left(\sum_{r=0}^{\infty}(6^r-5^r)\frac{x^r}{r!}\right) + \frac{x^3}{3!}\sum_{r=0}^{\infty}(6^r-5^r)\frac{x^r}{r!}$$

$$=$$

$$\sum_{r=0}^{\infty}(6^r-5^r)\frac{x^r}{r!} + \left(\sum_{r=0}^{\infty}(6^r-5^r)\frac{x^{r+1}}{r!}\right) + \frac{1}{2!}\left(\sum_{r=0}^{\infty}(6^r-5^r)\frac{x^{r+2}}{r!}\right) + \frac{1}{3!}\sum_{r=0}^{\infty}(6^r-5^r)\frac{x^{r+3}}{r!}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty}(6^r - 5^r)\frac{x^r}{r!} + \sum_{r=1}^{\infty}(6^{r-1} - 5^{r-1})r\frac{x^r}{r!} + \frac{1}{2!}\sum_{r=2}^{\infty}(6^{r-2} - 5^{r-2})r.\, r-1\frac{x^r}{r!} +$$

$$\frac{1}{3!}\sum_{r=3}^{\infty}(6^{r-3} - 5^{r-3})r.\, r-1.\, r-2\,\frac{x^r}{r!}$$

Jadi, banyaknya barisan yang dimaksud sama dengan koefesien $\frac{x^r}{r!}$ pada G(x) yaitu

$$a_r = \begin{cases} 0 & ;\ r = 0 \\ 1 & ;\ r = 1 \\ 11 & ;\ r = 2 \\ 6^r - 5^r + r(6^{r-1} - 5^{r-1}) + \frac{r(r-1)}{2}(6^{r-2} - 5^{r-2}) + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}(6^{r-3} - 5^{r-3}); & r \geq 3 \end{cases}$$

D. Latihan 5

1. Cari deret taylor dari fungsi berikut
   a. $f(x) = e^{k^2x}$
   b. $f(x)$ = sin x
   c. $f(x)$ = cos x
2. Tentukan fungsi pembangkit biasa (FPB) dari barisan berikut dan sederhanakan jika mungkin?.
   a. a_n = (3, 1, 3, 1,…)
   b. a_n = (0,0,0, 5, 5, 5,…)
   c. $a_n = n^{2n+1}$
3. Tentukan fungsi pembangkit eksponensial (FPE) dari barisan
   a.
   $$a_n = \begin{cases} 0, & 0 \leq n \leq 2 \\ 2n, & n \geq 3 \end{cases}$$
   b. (1, 2020, 1, 2020, …) ?.
4. Cari barisan a_n yang dibentuk oleh fungsi pembangkit biasa
   a. G(x) = $\frac{2}{1+3x} + e^{2x}$?
   b. G(x) == $\frac{2}{2-x} + e^{-2020x}$

5. Cari barisan a_n yang dibentuk oleh fungsi pembangkit eksponensial G(x) = $\left(5+5x+5x^2+...\right)+e^{3x}$?.
6. Ada berapa cara membagi bantuan 10.000 bungkus sembako (yang identik) terdiri dari : mie instan, telur dan beras kepada ***n*** kepala keluarga korban banjir bandang di kota “Bima”, jika setiap kepala keluarga mendapat paling sedikit 2 bungkus mie instant, telur paling banyak 5 butir, dan beras tidak lebih dari satu bungkus?.
7.

Perhatikan gambar di atas merupakan tampilan layar untuk membuka pola (sandi) sebuah handphone!
Ada berapa banyak Pola (sandi) yang dapat dibentuk dari angka-angka pada gambar di atas dengan syarat angka “0” muncul tepat 1 angka dan angka genap muncul sebanyak ganjil?
8. Berapa banyak cara memilih *r* huruf dari kata **HAPPY** jika memuat paling banyak 4 huruf H dan tepat 2 huruf Y ?
9. Tentukan banyaknya cara memilih ***r*** huruf dari huruf-huruf pembentuk kata **DISKRIT** sedemikian hingga setiap huruf konsonan terpilih paling sedikit satu dan huruf vokal terpilih paling banyak tiga?.
10. Ada berapa cara membagi *n* buah terompeh (yang identik) kepada 1000 orang yang merayakan detik-detik malam tahun baru 2018 M di

lapangan Serasuba Kota Bima sedemikian hingga setiap orang merayakan tahun baru di lapangan tersebut mendapat paling sedikit 1 buah terompeh?.

BAB 6
PRINSIP INKLUSIF - EKSLUSIF

A. Capaian Pembelajaran Mata kuliah (CPMK)

Mahasiswa mampu menjelaskan prinsip inklusif-ekslusif dan menerapkannya untuk menyelesaikan persoalan banyaknya pengaturan obyek-obyek yang memiliki sifat-sifat tertentu dengan syarat – syarat tertentu dengan cara berpikir logis, sistematis dan analitis melalui kinerja mandiri, tanggung jawab dan pantang menyerah.

B. Kemampuan Akhir yang Diharapkan (Sub-CPMK)

1. Menjelaskan prinsip inklusif - ekslusif
2. Membuktikan teorema prinsip inklusif – ekslusif
3. Menyelesaikan masalah menggunakan prinsip inklusif-ekslusif

C. Materi

6.1 Pengantar Prinsip Inklusif-Eklusif

Masih ingatkah Anda tentang operasi Himpunan dengan menggunakan operasi irisan dan gabungan?. Salah satu metode untuk menyelesaikan operasi himpunan tersebut menggunakan diagram venn. Nah, Prinsip *inklusif dan ekslusif* merupakan perluasan ide dalam diagram venn beserta operasi irisan dan gabungan. Prinsip *inclusion-exclusion* ini akan digunakan untuk menentukan banyaknya unsur-unsur dari himpunan yang tidak saling lepas, non*disjoint*. Selanjutnya prinsip ini akan diperluas untuk menghitung berbagai persoalan permutasi dengan beberapa sifat tertentu.

Mari kita ingat kembali beberapa definisi terkait himpunan yang akan mendukung prinsip inklusif – ekslusif yang disadur dari Munir.

Definisi 6.1

Himpunan (set) adalah kumpulan objek-objek yang berbeda dan tidak berurutan.

Definisi 6.2

Jumlah elemen dalam A disebut kardinal dari A. Kardinalitas dari himpunan A dinotasikan $|A|$ *atau n(A)*

Definisi 6.3

Irisan (intersection) dari himpunan A dan B adalah himpunan yang setiap elemennya merupakan elemen dari himpunan A dan himpunan B. Irisan dari himpunan A dan B dapat dinotasikan $A \cap B$

Definisi 6.4.

Gabungan (union) dari himpunan A dan B adalah himpunan yang setiap anggotanya merupakan anggota himpunan A atau B. Gabungan dari himpunan A dan B dapat dinotasikan $A \cup B$

6.2 Teorema Prinsip Inklusif-Eklusif

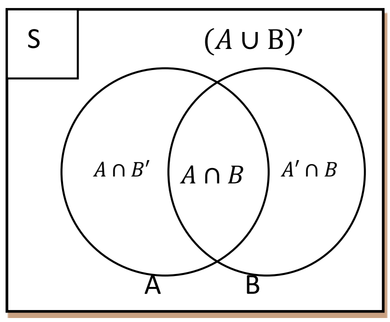
Teorema 6.1 : Prinsip inklusif -ekslusif secara khusus

Jika n adalah banyaknya obyek dalam himpunan S dan a_1, a_2 , a_3 sifat-sifat yang dimiliki oleh suatu obyek di S, maka

a. banyak obyek di S yang tidak memiliki sifat a_1, a_2 adalah
   n(a_1', a_2') = n - n(a_1) - n(a_2)+ n(a_1, a_2) **(6.1)**
b. banyak obyek di S yang tidak memiliki sifat a_1, a_2, a_3 adalah
   n(a_1', a_2', a_3') = n - n (a_1) - n (a_2)- n (a_3)+ n (a_1, a_2) + n (a_1, a_3) + n (a_2, a_3) - n (a_1, a_2, a_3) **(6.2)**

BUKTI TEOREMA 6.1

a. Misalkan S himpunan semesta yang memiliki n objek, A dan B adalah himpunan bagian dari S yang masing-masing memiliki sifat a_1 dan a_2, dengan $n\ (a_1)$ dan $n\ (a_2)$masing-masing menyatakan banyaknya elemen S yang memiliki sifat a_1 dan a_2. Himpunan $A \cap B$ merupakan himpunan bagian dari S yang memiliki sifat a_1 maupun a_2, dengan $n\ (a_1 a_2)$ menyatakan banyaknya elemen S yang memiliki sifat a_1 maupun a_2.. Sementara himpunan $A' \cap B' = (A \cup B)'$ merupakan himpunan bagian dari S yang tidak memiliki sifat a_1 maupun a_2, dengan $n\ (a_1{}' a_2{}')$ menyatakan banyaknya elemen S yang tidak memiliki sifat a_1 maupun a_2. Hal ini dapat diilustrasikan seperti pada gambar 6.1 berikut.



Gambar 6.1 Himpunan A ∩ B dan (A ∩ B)′

Perhatikan gambar di samping!

$|S| = n$

$|A| = n(a_1)$

$|B| = n(a_2)$

$|A \cap B| = n(a_1 a_2)$

$|A \cap B'| = n(a_1 a_2{}')$

$|A' \cap B| = n(a_1{}' a_2)$

$|(A \cup B)'| = |A' \cap B'| = n(a_1{}' a_2{}')$

Perhatikan lagi gambar 6.1 di atas. Tampak bahwa

S = $(A \cup B) \cup (A \cup B)'$

sehingga

$|S| = |(A \cup B)| + |(A \cup B)'|$

$\leftrightarrow |(A \cup B)'| = |S| - |(A \cup B)|$..(*)

begitu juga dengan

$(A \cup B) = (A \cap B') \cup (A \cap B) \cup (A' \cap B)$

$|(A \cup B)| = |(A \cap B')| + |(A \cap B)| + |(A' \cap B)|$

$\quad = |A| - |(A \cap B)| + |(A \cap B)| + |B| - |(A \cap B)|$

$\quad = |A| + |B| - |(A \cap B)| + |(A \cap B)| - |(A \cap B)|$

$|(A \cup B)| = |A| + |B| - |(A \cap B)|$...(**)

Dari persamaan (*) dan (**) di atas kita mendapatkan

$|(A \cup B)'| = |S| - |(A \cup B)|$

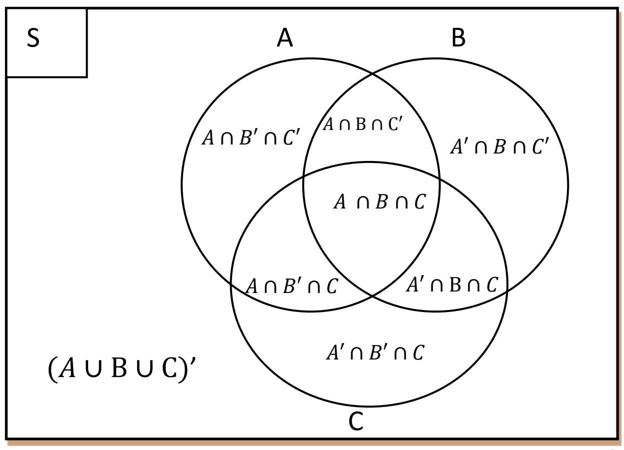
$\quad = |S| - (|A| + |B| - |(A \cap B)|)$

$\quad = |S| - |A| - |B| + |(A \cap B)|$

$\leftrightarrow n(a_1{'}a_2{'}) = n - n(a_1) - n(a_2) + n(a_1a_2)$

Jadi, terbukti bahwa banyak obyek di S yang tidak memiliki sifat a_1, a_2 adalah $n(a_1{'}a_2{'}) = n - n(a_1) - n(a_2) + n(a_1a_2)$

b. Dengan cara yang sama Kita juga dapat memperluas teorema 6.1a untuk tiga himpunan A, B, dan C yang masing-masing memiliki sifat a_1, a_2 dan a_3. Himpunan $A \cap B \cap C$ merupakan himpunan bagian dari S yang memiliki sifat a_1, a_2 maupun a_3 dengan $n\,(a_1a_2a_3)$ menyatakan banyaknya elemen S yang memiliki sifat a_1, a_2 maupun a_3. Sementara himpunan $A' \cap B' \cap C'$ = $(A \cup B \cup C)'$ merupakan himpunan bagian dari S yang tidak memiliki sifat a_1, a_2 maupun a_3, dengan $n(a_1{'}a_2{'}a_3{'})$ menyatakan banyak elemen S yang tidak memiliki sifat a_1, a_2 maupun a_3. Hal ini dapat diilustrasikan seperti pada gambar 6.2 berikut.



Gambar 6. 2 Himpunan $\mathbf{A \cap B \cap C}$ dan $(\mathbf{A \cup B \cup C})'$

Perhatikan gambar di atas!
$|S| = n$
$|A| = n(a_1)$
$|B| = n(a_2)$
$|C| = n(a_3)$
$|A \cap B| = n(a_1a_2)$
$|A \cap C| = n(a_1a_3)$
$|B \cap C| = n(a_2a_3)$
$|A \cap B \cap C| = n(a_1a_2a_3)$
$|(A \cup B \cup C)'| = |A' \cap B' \cap C'| = n(a_1{'}a_2{'}a_3{'})$

Perhatikan lagi gambar 6.2 di atas. Tampak bahwa
S = $(A \cup B \cup C) \cup (A \cup B \cup C)'$
sehingga
$|S| = |(A \cup B \cup C)| + |(A \cup B \cup C)'|$
$\leftrightarrow |(A \cup B \cup C)'| = |S| - |(A \cup B \cup C)|$...(***)

begitu juga dengan

$(A \cup B \cup C) = (A \cap B' \cap C') \cup (A \cap B \cap C') \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C') \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A' \cap B' \cap C)$

$|(A \cup B \cup C)| = |(A \cap B' \cap C')| + |(A \cap B \cap C')| + |(A \cap B \cap C)| + |(A \cap B' \cap C)| + |(A' \cap B \cap C')| + |(A' \cap B \cap C)| + |(A' \cap B' \cap C)|$

$= |A| - |(A \cap B \cap C')| - |(A \cap B' \cap C)| - |(A \cap B \cap C)| + |(A \cap B \cap C')| + |(A \cap B \cap C)| + |(A \cap B' \cap C)| + |(A' \cap B \cap C)| + |B| - |(A \cap B \cap C')| - |(A' \cap B \cap C)| - |(A \cap B \cap C)| + |C| - |(A \cap B' \cap C)| - |(A' \cap B \cap C)| - |(A \cap B \cap C)|$

$= |A| + |B| + |C| - |(A \cap B \cap C')| - |(A \cap B \cap C')| + |(A \cap B \cap C')| - |(A \cap B' \cap C)| - |(A \cap B \cap C)| + |(A \cap B \cap C')| + |(A \cap B \cap C)| + |(A \cap B' \cap C)| + |(A' \cap B \cap C)| + |B| - |(A \cap B \cap C')| - |(A' \cap B \cap C)| - |(A \cap B \cap C)| + |C| - |(A \cap B' \cap C)| - |(A' \cap B \cap C)| - |(A \cap B \cap C)|$

$= |A| + |B| + |C| - |(A \cap B \cap C')| - |(A \cap B' \cap C)| + |(A' \cap B \cap C)| + |(A \cap B \cap C)|$

$= |A| + |B| + |C| - |(A \cap B)| - |(A \cap C)| - |(B \cap C)| + |(A \cap B \cap C)|$

$n(a_1 a_2 a_3) = n(a_1) + n(a_2) + n(a_3) - n(a_1 a_2) - n(a_1 a_3) - n(a_2 a_3) + n(a_1 a_2 a_3)$...(****)

Dari persamaan (***) dan (****) di atas kita memperoleh

$|(A \cup B \cup C)'| = |S| - |(A \cup B \cup C)|$

$\leftrightarrow n(a_1' a_2' a_3') = n - (n(a_1 a_2 a_3))$

$= n - n(a_1) - n(a_2) - n(a_3) + n(a_1 a_2) + n(a_1 a_3) + n(a_2 a_3) - n(a_1 a_2 a_3)$

Dengan demikian teorema terbukti

Teorema ini dapat diperluas dalam teorema 6.2 berikut

Teorema 6.2 : Prinsip inklusif -ekslusif secara umum

Jika n adalah banyaknya obyek dalam himpunan S dan a_1, a_2, a_3 sifat-sifat yang dimiliki oleh suatu obyek di S, maka banyak obyek di *S* yang tidak memiliki sifat $a_1, a_2, \dots a_r$ adalah

$$n(a_1', a_2', \dots, a_r') = n - \sum_i n(a_i) + \sum_{i,j} n(a_i a_j) - \sum_{i,j,k} n(a_i a_j a_k) \pm \dots + (-1)^r n(a_1 a_j \dots a_r) \qquad .(6.3)$$

dengan (i, j,k) $\in (1,2,3,\dots,r)$. *i, j, k* berbeda

$n(a_1, a_2, \dots, a_r)$ = banyak obyek ***S*** yang memiliki sifat $a_1, a_2, \dots a_r$

$n(a_1', a_2', \dots, a_r')$ = banyak obyek ***S*** yang tidak memiliki sifat $a_1, a_2, \dots a_r$

$n(a_i, a_j')$ = banyak obyek ***S*** yang yang memiliki sifat a_i,tapi bukan sifat a_i.

$n(a_i)$ = banyak obyek ***S*** yang yang memiliki sifat a_i

$n(a_j)$ = banyak obyek ***S*** yang yang tidak memiliki sifat a_i

Bukti

Akan ditunjukkan bahwa setiap elemen S yang tidak memiliki sifat sifat a_1, $a_2, \ldots a_r$ dihitung tepat sekali pada sisi kanan persamaan (6.3). Anggap x adalah elemen dari tepat r himpunan $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, dengan $1 \leq r \leq n$. Elemen x dihitung sebanyak C(r,0) kali dari n =$|S|$, dihitung sebanyak C(r,1) kali dari $|A_i|$ = $\sum_i n(a_1)$ dihitung sebanyak C(r,2) kali dari $|A_i \cap A_j|$ = $\sum_{i,j} n(a_i a_j)$, dihitung sebanyak C(r,3) kali dari $|A_i \cap A_j \cap A_k|$ = $\sum_{i,j,k} n(a_i a_j a_k)$ dan seterusnya. Secara umum, dihitung sebanyak C(r,m) kali dari penjumlahan m kali himpunan A_i. dengan demikian elemen x pada ruas kanan dihitung sebanyak n kali dengan

n = C(r,0) - C(r,1) + C (r,2) - C(r,3)+….+$(-1)^r$ C(r,r), dengan menggunakan koefesien binomial $\sum_k^n (-1)^k \binom{n}{k}$ = 0,maka

C(r,0) - C(r,1) + C (r,2) - C(r,3)+….+$(-1)^r$ C(r,r) = 0 atau n = 0

Dengan demikian teorema terbukti.

6.3 Aplikasi Prinsip Inklusif-Eklusif

Berikut kita sajikan beberapa contoh penerapan prinsip iklusif –ekslusif yang sudah kita bahas sebelumnya.

Contoh 6.1

Tentukan banyaknya barisan binair 6 angka yang memuat angka “0” sebanyak tiga dan angka “1” sebanyak tiga sedemikian hingga pola-pola “000” dan 111 tidak muncul?

Alternatif penyelesaian

Diketahui :

Misal S = himpunan barisan binair 6 angka “0” dan”1” masing-masing sebanyak tiga

a_1 = sifat muncul pola “000”

a_2 = sifat muncul pola “111”

Ditanyakan: $n(a_1{}'a_2{}')$ = …?

Maka

$|S| = n$ =banyak permutasi dengan beberapa unsur yang sama dari {0,0,0,1,1,1}

$= \mathrm{P}(6;3{,}3) = \frac{6!}{3!.3!}$ = 20

$n(a_1)$ = banyak permutasi dengan beberapa unsur yang sama dari {000,1,1,1}. Dalam hal ini angka “000” dihitung satu elemen sehingga sama dengan permutasi 4 dari satu angka “0” dan 3 angka ”1”

$= P(4;1,3) = \frac{4!}{1!.3!}$ =4

$n(a_2)$ =banyak permutasi dengan beberapa unsur yang sama dari {0,0,0,111}. Dalam hal ini angka “1” dihitung satu elemen sehingga sama dengan permutasi 4 dari satu angka “1” dan 3 angka ”0”

$= P(4;3,1) = \frac{4!}{3!.1!}$ =4

$n(a_1 a_2)$ =banyak permutasi dengan beberapa unsur yang sama dari {000,111}. Dalam hal ini angka “0” dan angka “1” masing-masing dihitung satu elemen sehingga sama dengan permutasi 2 dari satu angka “1” dan satu “3”.

$= P(2;1,1) = \frac{2!}{1!.1!}$ =2

Dengan menggunakan prinsip inklusif-ekslusif (lihat teorema 6.1a) diperoleh

$$\begin{aligned} n(a_1{}'a_2{}') &= n - n(a_1) - n(a_2) + n(a_1 a_2) \\ &= 20 - 4 - 4 + 2 \\ &= 14 \end{aligned}$$

Jadi, ada 14 barisan binair enam angka yang memuat angka “0” sebanyak tiga dan angka “1” sebanyak tiga sedemikian hingga pola-pola “000” dan 111 tidak muncul.

Contoh 6.2

Ada berapa bilangan antara 1 sampai dengan 500 yang tidak habis dibagi 3, 4, dan 6?

Alternatif penyelesaian

Diketahui :

Misal S = {1, 2, 3, …, 500}

a_1 = sifat habis dibagi 3

a_2 = sifat habis dibagi 4

a_3 = sifat habis dibagi 6

Ditanyakan: $n(a_1{}'a_2{}'a_3{}')$ = …?

Maka

$|S| = n$ = 500

$n(a_1)$ = banyak anggota S yang habis dibagi 3

$= \left\lfloor \frac{500}{3} \right\rfloor = \lfloor 166{,}6\ldots \rfloor$ = 166

$n(a_2)$ = banyak anggota S yang habis dibagi 4

$= \left\lfloor \frac{500}{4} \right\rfloor = \lfloor 125 \rfloor$ = 125

$n(a_2)$ = banyak anggota S yang habis dibagi 6

$= \left\lfloor \frac{500}{6} \right\rfloor = \lfloor 83{,}3 \ldots \rfloor$ = 83

$n(a_1 a_2)$ =banyak anggota S yang habis dibagi 3 dan 4

$= \left\lfloor \frac{500}{12} \right\rfloor = \lfloor 41{,}6 \ldots \rfloor$ = 41

12 adalah Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK) dari 3 dan 4

$n(a_1 a_3)$ = banyak anggota S yang habis dibagi 3 dan 6

$= \left\lfloor \frac{500}{6} \right\rfloor = \lfloor 83,3 \ldots \rfloor = 83$

6 adalah Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK) dari 3 dan 6

$n(a_2 a_3)$ = banyak anggota S yang habis dibagi 4 dan 6

$= \left\lfloor \frac{500}{12} \right\rfloor = \lfloor 41,6 \ldots \rfloor = 41$

12 adalah Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK) dari 4 dan 6

$n(a_1 a_2 a_3)$ = banyak anggota S yang habis dibagi 3, 4 dan 6

$= \left\lfloor \frac{500}{12} \right\rfloor = \lfloor 41,6 \ldots \rfloor = 41$

12 adalah Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK) dari 3, 4 dan 6

Dengan menggunakan prinsip inklusif-ekslusif (lihat teorema 6.1b) diperoleh

$n(a_1{}'a_2{}'a_3{}') = n - n(a_1) - n(a_2) - n(a_3) + n(a_1 a_2) + n(a_1 a_3) + n(a_2 a_3) - n(a_1 a_2 a_3)$

$n(a_1{}'a_2{}'a_3{}') = 500 - 166 - 125 - 83 + 41 + 83 + 41 - 41$

$= 250$

Jadi, ada 250 bilangan dari 1 sampai dengan 500 yang tidak habis dibagi 3, 4, dan 6.

D. Latihan 6

Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan langkah-langkah yang jelas, tepat dan benar

1. Terdapat 1500 mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika di sebuah kampus. Sebanyak 810 orang mengambil mata kuliah keahlian yang terdiri dari tiga mata kuliah, yaitu: Kalkulus, Analisis Real dan Metode Diskrit. Ada 25 mahasiswa mengambil mata Kuliah kalkulus, 20 mahasiswa mengambil mata kuliah Analisis Real. Sebanyak 15 mahasiswa mengambil mata kuliah Kalkulus dan Analisis Real, 25 Mahasiswa mengambil mata kuliah Analisis Real dan Metode Diskrit, dan 10 mahasiswa mengambil mata kuliah metode diskrit dan kalkulus. Jika terdapat 20 orang mengambil sekaligus ketiga mata kuliah tersebut, maka berapa banyak Mahasiswa yang belum mengambil mata kuliah keahlian?
2. Ada berapa pola (kata sandi) untuk membuka sebuah handphone yang dibentuk dari angka 0 sampai dengan 9 dengan panjangnya 6 karakter sedemikian sehingga pola-pola 123 dan 456 tidak muncu?

3. Buktikan Jika n adalah banyaknya obyek dalam himpunan S dan x_1, x_2, x_3, x_4 sifat-sifat yang dimiliki oleh suatu obyek di S, maka banyak obyek di *S* yang tidak memiliki sifat x_1, x_2, x_3, x_4 adalah
$n(x_1'x_2'x_3'x_4') = n - \sum_{i} n(x_i) + \sum_{i,j} n(x_i x_j) - \sum_{i,j,k} n(x_i x_j x_k) + n(x_1 x_2 x_3 x_4)$
4. Tentukan banyak bilangan bulat yang terdiri dari 1 sampai dengan 5000 yang tidak habis dibagi dengan bilangan cacah pangkat tiga kurang dari 300!
5. Tentukan banyaknya permutasi dari 0, 1, 2,…, 9 yang diawali dengan digit 765 atau memuat digit 45 pada posisi ke-5 dan 6 atau diakhiri dengan digit 123.

DAFTAR PUSTAKA

Budayasa, I. (2012). *Matematika Diskrit*. Surabaya: University Press.

Kusumah, Y. S. (1997). *Matematika Diskrit*. Bandung: Upi Bandung.

Liphschurtz, S. & Lipson, M. (2000). *Discrete Mathematics Third Edition*. Jakarta: Erlangga.

Munir, R. (2005). *Matematika Diskrit Revisi kelima.* Bandung: Informatika.

Rosen, K. (2012). *Discrete Mathematics and Its Applications, 7th ed., McGraw-*. McGraw-Hill: New York.

Siang, J. J. (2002). *Matematika Diskrit Aplikasinya Pada Komputer*. Yogyakarta: Andi.

PROFIL PENULIS

Murtalib, S.Pd., M.Pd. Lahir di desa Soki Kecamatan Belo, kab. Bima – NTB pada tanggal 5 September 1987. Menyelesaikan sekolah dasar dan menengah di tanah kelahiran (SDN Inp. Lido, SMPN 1 Belo), SMKN 2 Kota Bima. Menempuh pendidikan S1 di IKIP Mataram (2005 – 2009) dan melanjutkan studi S2 di Universitas Negeri Surabaya (2012 – 2014). Mengawali karir sebagai dosen luar biasa di Universitas Muhammadiyah Mataram (2010-2012) sembari menjadi guru di Pondok Pesantren MA Hidayatullah Mataram (2010 – 2012). Setelah Lulus S2 tahun 2015 menjadi tenaga dosen tetap di Program Studi Pendidikan Matematika Universitas Nggusuwaru Bima (2015- hingga sekarang). Mata kuliah yang pernah di ajar antara lain :Metode Diskrit, Metode Numerik, Kompetensi Dasar Mengajar Matematika, Microteaching, Assesmen Pembelajaran Matematika, Aljabar Liniear Elementer, Metode Statisitik, dan Analisis Real I & II.

Gunawan, S.Pd., M.Pd. Lahir di Bima desa pada tanggal 23 Juli 1979. Menyelesaikan sekolah dasar dan menengah di tanah kelahiran (SDN 10 Bima, SMPN 2 Bima, SMUN 1 Bima). Menempuh pendidikan S1 di Universitas Muhammadiyah Makassar (1998 – 2003) dan melanjutkan studi S2 di Universitas Negeri Makassar (2015 – 2017). Mengawali karir sebagai dosen Universitas Nggusuwaru Bima (2007 – sekarang), Guru di MAN 2 Kota Bima (2007 – 2015) selain menjadi tenaga pengajar, pernah juga bekerja sebagai ketua Panwas Kecamatan Rasanae Barat 2018 - 2019), tenaga ahli data entry Pemilu Tahun 2004). Mata kuliah yang pernah di ajar antara lain : Sejarah Matematika, Metode Penelitian.

Dr. Syarifuddin, S.Pd., M.Pd. Lahir di desa Leu – kec. Bolo – kab. Bima – NTB pada tanggal 3 Juli 1983. Menyelesaikan sekolah dasar dan menengah di tanah kelahiran (SDN Inp. Leu, SMPN 1 Bolo, SMAN 1 Bolo). Menempuh pendidikan S1 di IKIP Mataram (2002 – 2007) dan melanjutkan studi S2 di Universitas Negeri Yogyakarta (2009 – 2011). Pendidikan S3 di Universitas Negeri Malang (2016 – 2020). Mengawali karir sebagai dosen tetap di IKIP Mataram (2007 – 2014), dan menjadi tenaga dosen di IAIN Mataram dan STMIK Bumigora Mataram (2012 – 2014). Pada tahu 2014 pindah ke Bima dan memulai karier sebagai dosen Program Studi Pendidikan Matematika di STKIP Taman Siswa Bima. Di tahun 2015, menjadi dosen Program Studi Pendidikan Matematika di STKIP Bima yang kemudian berubah status menjadi Universitas Nggusuwaru. Awal tahun 2024 hingga sekarang, menjadi dosen tetap di Universitas Muhammadiyah Bima. Karya yang pernah dihasilkan adalah Buku "Desain Pembelajaran Matematika", buku "Aljabar Linear", dan "Buku Analisis Kompleks".